
Процессы
регулирования
в моделях
экономических
систем



ПРОЦЕССЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

СБОРНИК СТАТЕЙ

ПЕРЕВОД
Л. М. БАРИЛЕНКО и В. Я. ФРИДМАНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
д-ра техн. наук Я. З. ЦЫПКИНА
и канд. эконом. наук Б. Н. МИХАЛЕВСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

Одной из важных ветвей кибернетики является теория автоматического регулирования и управления, которая за последние два десятилетия достигла высокого уровня развития и широко используется в различных областях техники. За последние годы методы этой теории стали с успехом применяться и в других довольно далеких от техники областях, в частности в биологии и экономике.

«Моделирование» экономических систем и исследование этих «моделей» методами теории регулирования открывают широкие возможности для анализа экономических показателей и изучения динамики экономических процессов. Они позволяют также использовать современные быстродействующие электронные счетные машины для анализа статистических данных, экономического планирования и прогнозирования.

Настоящий сборник, составленный из статей немецких и американских специалистов, восполняет существенный пробел в нашей литературе по этому важному направлению «математической экономики».

Затрагивая вопросы, лежащие на стыке различных наук — экономики, математики, физики и техники, — сборник представит значительный интерес не только для экономистов, на которых он в первую очередь рассчитан, но и для математиков, специалистов по автоматическому регулированию, философов и всех, кто интересуется вопросами кибернетики и ее приложениями в новых областях.

Редакция литературы по вопросам техники

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Аналогия, существующая между процессами регулирования и управления в системах самой разнообразной физической природы, послужила основой создания нового научного направления — кибернетики.

Кибернетика как наука об общих принципах управления и регулирования уже сыграла важную роль в установлении тесной связи между отраслями знания, казавшимися весьма далекими друг от друга. Автоматика, например, имеет дело с разработкой автоматических систем регулирования и управления, применяемых в различных областях техники (в области материального производства, связи, транспорта, контроля и т. п.). Биологические науки занимаются исследованием функционирования различных биологических объектов — от отдельной клетки, ткани и органа до живого организма и целых животных ассоциаций. Экономика изучает взаимодействие разнообразных связей и процессов в сложных экономических системах, начиная от отдельного предприятия до отрасли производства и экономики народного хозяйства в целом.

Между этими областями есть существенные качественные различия, определяемые качественным своеобразием каждого объекта — «мертвой» материи, живой природы и социальных явлений. Но и по отношению к вмешательству человека они ведут себя весьма различно. Если техническую систему конструктор может проектировать и создавать по своему усмотрению, согласно заранее намеченному плану, а в заданной экономической системе удается, изменяя некоторые связи, оказывать заметное влияние на протекание процессов и на конеч-

ные результаты, то в живом организме, например, осуществить такое вмешательство значительно сложнее.

Но несмотря на существенные различия описанных систем, их поведение обнаруживает много общих черт. Это обусловлено общностью действия во всех этих системах основных законов управления, осуществляемого путем передачи и переработки в них потоков *информации*.

Характерной принципиальной особенностью всех этих качественно столь различных систем является наличие в них «обратных связей», благодаря которым управление системой или ее саморегулирование осуществляется в зависимости от отклонений тех или иных величин от некоторых номинальных значений.

Изучением систем с обратной связью, применяемых в технике (механических, электрических, гидравлических и пр.), занимается теория автоматического регулирования (теория следящих систем), которая за последние 10—15 лет достигла высокого уровня развития. Математически хорошо обоснованная и накопившая большой практический опыт, теория автоматического регулирования позволяет ответить на многие вопросы, возникающие при создании автоматических систем регулирования и управления независимо от характера их конкретной физической реализации.

Поэтому весьма естественны и своевременны попытки использовать добытые в теории автоматического регулирования результаты и при исследовании систем иной природы, в частности экономических систем, которые ввиду их чрезвычайной сложности до самого последнего времени трудно поддавались описанию на математическом языке.

Подобная работа в применении к биологическим объектам уже привела к ряду ценных результатов[1]).

Внедрение строгих математических методов в область изучения таких явлений, как экономические, также ока-

---

[1]) См., например, сборник «Процессы регулирования в биологии», Издательство иностранной литературы, 1960.

зывается весьма плодотворным. Здесь уместно напомнить известное высказывание К. Маркса, что «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой»[1]. Но и само развитие кибернетики, ознаменовавшееся триумфальным шествием машинной вычислительной техники, позволяет сейчас совсем по-иному подойти к анализу сложных многосвязных систем, примером которых может служить экономика народного хозяйства. Если раньше попытки строгого количественного описания таких систем были осуждены на бесплодие ввиду практической невозможности разрешения, скажем, систем из сотен линейных дифференциальных уравнений с сотнями неизвестных или нахождения оптимальных значений параметров путем их произвольного варьирования, то современным быстродействующим цифровым и моделирующим устройствам эта задача оказалась по плечу.

Все это открывает новые перспективы для развития экономической науки, вооруженной мощными методами современной математики и вычислительной техники.

Нет нужды особо останавливаться на том значении, которое эти новые методы в экономике имеют для совершенствования нашей советской экономики и задач социалистического планирования.

Состоявшееся в апреле 1960 г. в Москве Совещание по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании сыграло важную роль в повороте внимания наших экономистов к этим проблемам. Нельзя не согласиться с акад. В. С. Немчиновым, заявившим с трибуны совещания:

«Практика нашего планирования ощущает острую необходимость в разработке достаточно сложных экономических моделей, охватывающих различные стороны социалистической экономики. Большие трудности возникают с динамическим моделированием народнохозяйственных процессов. Построение динамических и народнохозяйственных моделей — один из важнейших специ-

---

[1]) «Воспоминания о К Марксе и Ф. Энгельсе», М., 1956, стр. 66

фических методов народнохозяйственного планирования».

Цель настоящего сборника — познакомить советского читателя с зарубежными работами в области моделирования экономических систем, использования методов теории регулирования для исследования этих моделей и применения для их анализа электронных вычислительных машин.

При этом, естественно, следует предостеречь читателя от некритического подхода к положениям и выводам зарубежных ученых.

Как в естествознании и технике, так и в экономике, для выявления существенных закономерностей и их количественного описания приходится рассматривать некоторые схематизированные, упрощенные модели явлений. За последние десятилетия буржуазными учеными созданы многочисленные статические и динамические модели макроэкономических процессов капиталистической экономики (модели Кейнса, Калецкого, Харрода, Хикса, Хансена, Гудвина, Вальраса, Неймана, Самуэлсона, Тинбергена, Фриша, Клейна, Домара и др.), ряд которых обсуждается в настоящем сборнике.

Самый метод моделирования экономических процессов не может у марксиста вызвать возражений. Как и в других науках, метод моделей фактически давно применяется в марксистской политической экономии. Первыми народнохозяйственными моделями были хорошо известные схема расширенного воспроизводства Карла Маркса и схема рыночной реализации общественного продукта В. И. Ленина.

Но все дело состоит в исходных теоретических предпосылках, которые кладутся в основу модели, в принципах отбора существенных связей и отбрасывания несущественных при схематизации процесса, в степени реальности делаемых допущений и упрощений.

А в этом отношении все модели буржуазных экономистов, претендующие на описание экономики капиталистического хозяйства в целом, методологически несостоятельны.

При рассмотрении таких моделей и их исходных политико-экономических предпосылок следует помнить указание В. И. Ленина, что «ни *единому* профессору политической экономии, способному давать самые ценные работы в области фактических, специальных исследований, нельзя верить *ни в одном слове*, раз речь заходит об общей теории политической экономии. Ибо эта последняя — такая же *партийная* наука в современном обществе, как и *гносеология*[1]).

Имея зачастую откровенно апологетический характер по отношению к современному капитализму, буржуазные модели экономической динамики по существу своему не реальны, оторваны от действительности, ибо отвлекаются как раз от наиболее существенных черт современного общественного производства, игнорируют коренные социально-экономические противоречия капитализма. А по меткому слову Джона Стюарта Милля, «в политической экономии наибольшие заблуждения происходят от упущения наиболее очевидных истин».

Используя такие агрегированные понятия, как «потребление», «сбережения», «накопление» и т. д., авторы подобных моделей маскируют антагонистическую природу этих категорий в условиях капиталистического общества, основанного на эксплуатации.

Большинство этих моделей основано на теории «факторов производства», по которой труд неправомерно ставится в один ряд с землей и капиталом, а оплата труда ставится в один ряд с оценкой «услуг» земли и капитала. Они основаны на гипотезе абсолютно свободной конкуренции, фетишизируют якобы действующий в капиталистической экономике принцип «предельной полезности», не учитывают роли технического прогресса, игнорируют закон концентрации производства и т. д., т. е. отвлекаются как раз от наиболее характерных черт современного капитализма.

В силу этого *сами модели* капиталистической экономики представляют весьма ограниченную ценность для советских экономистов.

---

[1]) В. И. Ленин, Сочинения, т. 14, стр. 328.

Тем не менее некоторые выводы авторов этих моделей представляют интерес. Так, основное место в сборнике занимает анализ моделей кейнсианского типа, апологетическая сущность которых хорошо известна советскому читателю[1]). Но любопытно при этом, что сам Кейнс и авторы некоторых помещенных в сборнике статей (Смит и Эрдли, Гейер) приходят к выводу, что в настоящее время капиталистическая экономика не имеет саморегулирующегося механизма, который обеспечил бы ее устойчивость и избавил бы капиталистическое хозяйство от кризисов.

В моделях кейнсианского типа это отражается в том, что соотношение спроса и предложения, определяемое главным образом предельной склонностью к потреблению, предельной эффективностью капитала и предпочтением ликвидности, не создает достаточного размера потребительского спроса и объема капиталовложений, обеспечивающих устойчивое равновесие системы.

Вследствие этого в моделях кейнсианского типа, основанных на комбинированном действии мультипликатора и акселератора (модели Калецкого, Смита — Эрдли, Филипса и др.), независимо от того, являются ли они нелинейными или линеаризированными, присутствуют более или менее периодически возникающие колебательные процессы[2]).

Поэтому для «регулирования» капиталистической экономики предлагается лишь одно средство — введение в качестве регулирующего воздействия государственного спроса. Но буржуазное государство в силу своей природы может оказывать лишь ограниченное воздействие на стихийно развивающуюся капиталистическую экономику, и предлагаемые меры, конечно, не могут избавить капиталистическую экономику от раздирающих

---

[1]) См., например, вступительную статью И. Г. Блюмина к книге Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег», Издательство иностранной литературы, 1949.

[2]) Краткий обзор линейных моделей см. в главах 8 и 9 книги Р. Аллена «Математическая экономика», перевод которой готовится Издательством иностранной литературы (см. дополнительную литературу [2]).

ее противоречий, выражающихся во внутренне присущей ей неустойчивости. Несостоятельность всех подобных теорий «регулируемого» капитализма уже достаточно убедительно раскрыта в советской литературе[1]).

Таким образом, предлагаемые буржуазными экономистами модели капиталистической экономики в целом научно несостоятельны и должны быть нами отвергнуты, несмотря на некоторые их любопытные результаты.

Тем не менее издание настоящего сборника представляется весьма целесообразным и отвечает потребностям развития нашей экономической науки, призванной обслуживать растущие нужды народного хозяйства страны.

Помимо того, что собранные в сборнике статьи позволяют составить представление о важном направлении в современной буржуазной экономической мысли — об одной из ветвей эконометрики, — они имеют и большое практическое значение для советских экономистов. Не сами модели, а общая методика математического моделирования экономических процессов, методы применения к подобным моделям математического аппарата теории регулирования, наконец, методы анализа экономических моделей при помощи современных цифровых и моделирующих вычислительных устройств — вот что может представить, как мы полагаем, значительный интерес для советского читателя.

Конечно, небольшой по объему сборник не может дать полного представления о всем богатом арсенале математических методов и технических средств, которые могут быть использованы при решении экономических задач. Например, теперь уже нельзя утверждать, как это делает Леземан в своей статье, что задачи динамики экономических систем сводятся преимущественно к составлению и решению систем линейных дифференциальных уравнений.

За последние годы к задачам экономического моделирования стали успешно применяться общие методы

---

[1]) См., например, сборник «Критика теорий „регулируемого капитализма"», Соцэкгиз, 1959, и книгу Р. Х. Хафизова «Критика теорий государственного регулирования капиталистической экономики», Изд-во Ин-та междунар. отн., 1961.

кибернетики, в частности методы исследования операций. В связи с этим наряду с анализом систем в настоящее время уже началась разработка методов отыскания оптимальных экономических систем.

Примером определения оптимальной экономической системы может служить регулирование экономики по минимуму среднеквадратичного отклонения потребления конечной продукции от ее выпуска. Эта задача может решаться либо обычными методами статистической динамики (см. дополнительную литературу [9]), либо же, еще более эффективно, — средствами динамического программирования (см. дополнительную литературу [3, 12]). Преимущества последнего подхода заключаются в том, что оптимальное решение зависит не от начальных условий, а от состояния системы в момент принятия решения. Более общая задача управления может быть сведена к регулированию по номинальному значению в конечный момент времени.

Другим примером применения современных математических методов к проблеме определения оптимальных экономических систем является представление развивающейся экономики в виде многоэтапной системы линейного программирования с обратными связями.

Применение теории автоматического регулирования к анализу экономических систем сразу выявляет тесную связь их с современными методами экономического прогнозирования и получения оптимальных оценок экономических параметров. Эти методы включают как прогнозирование с помощью обычных средств (систем дифференциальных, конечно-разностных или дифференциально-разностных уравнений), так и применение более тонких средств вероятностного прогнозирования и вероятностных оценок экономических параметров (см. дополнительную литературу [7, 9]).

Многообразием аппарата и большим объемом вычислительных работ в значительной мере объясняется тот факт, что подавляющее большинство исследований и практических решений экономических задач осуществляется на цифровых вычислительных машинах. Но, как и в автоматике, для изучения динамики экономических

систем начиная с 1953 г. стали применяться и *электронные модели* (см. статью Смита и Эрдли, стр. 255). В настоящее время уже проводятся первые опыты электронного моделирования отдельных отраслей промышленности, групп потребителей и экономики в целом (см. дополнительную литературу [6, 8]).

Наиболее систематически применение методов теории автоматического регулирования для изучения динамики моделей экономических систем изложено в книгах Тастина «Механизм экономических систем», вышедшей первым изданием в 1953 г. [1]), и Филипса «Кибернетика и регулирование экономических систем» [2]). Но несмотря на широкое применение такого подхода за границей наши экономисты до последнего времени ограничивались лишь качественным описанием экономических процессов. Между тем внедрение строгих количественных методов в экономику, ее прочный союз с математикой насущно необходимы для дальнейшего развития и совершенствования нашего народного хозяйства, и именно плановая социалистическая экономика создает благоприятную почву для использования метода моделей и внедрения электронных вычислительных машин в практику народнохозяйственного планирования.

Настоящий сборник восполняет, таким образом, существенный пробел в нашей литературе. В него вошли 7 докладов, зачитанных на специальной конференции по вопросам применения теории автоматического регулирования в экономике, состоявшейся в 1955 г. в Эссене (ФРГ). Эти доклады изданы отдельным сборником в Мюнхене в 1957 г. [3]). Кроме того, в сборник включены переводы трех статей из американских журналов, дополняющие материалы конференции немецких специа-

---

[1]) Tustin A., The Mechanism of Economic Systems, London, 1953.

[2]) Philips A., Cybernetics and the Regulation of Economic Systems, London, 1959.

[3]) Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge im Vergleich zu Regelungsvorgängen der Technik, Zusammengestellt von H. Geyer und W. Oppelt, München, 1957.

листов. В конце приведен краткий список дополнительной литературы.

Сборник представляет несомненный интерес для экономистов, занимающихся вопросами динамики экономических систем и их моделированием. В нем экономист найдет достаточно простое изложение основ теории автоматического регулирования, математического аппарата, используемого для описания моделей экономических систем, и способов его применения для анализа динамики этих систем. Это поможет ему формулировать и решать задачи динамики экономических моделей, составленных на основе марксистско-ленинской экономической теории как для капиталистической, так и, в первую очередь, для социалистической экономики.

Сборник представляет интерес также для специалистов в области автоматики, так как он наглядно иллюстрирует новые широкие возможности применения теории автоматического регулирования, а также для философов и всех, кто интересуется новыми приложениями кибернетики.

Я. З. Цыпкин,
Б. Н. Михалевский,
В. Я. Фридман.

ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ [1])

В. Г. ВАФФЕНШМИДТ
(Гейдельберг)

Бывают конференции, которые являются подлинными вехами в развитии науки. Вполне возможно, что к ним принадлежит и конференция [2]), состоявшаяся 3 и 4 марта 1955 г. в Эссене, на которой экономисты, инженеры, физики и математики обменялись мнениями о возможностях применения теории автоматического регулирования к экономическим проблемам.

Эти вопросы, как говорится, витают в воздухе. Воздух сгущается, когда проблемы приобретают политическую окраску. Но в данном случае этого не произошло, поскольку у всех участников конференции на первом плане стояли лишь вопросы методики и технических средств исследования.

В первую очередь на обсуждение был поставлен вопрос, можно ли с помощью схем и методов, развитых в теории автоматического регулирования, исследовать экономические проблемы. Участников конференции объединяло стремление учиться друг у друга и передать коллегам свой опыт. При этом обнаружилось, что в экономической динамике и в современной технике концепция «потоков» во многом формально совпадает.

Специалист в области теории регулирования Оппельт изложил на конференции основные понятия, структуру и идеи общей теории регулирования. Известный теоретик

---

[1]) Waffenschmidt W. G., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge im Vergleich zu Regelungsvorgängen der Technik» zusammengestellt von H. Geyer und W. Oppelt (Сборник докладов на конференции по вопросам применения теории регулирования в экономике, состоявшейся в Эссене в марте 1955 г.), Oldenbourg, München, 1957, стр. 7—8.

[2]) Конференция созвана по инициативе Дома техники и объединенной комиссии по технике регулирования Союза немецких инженеров и Союза немецких электротехников (ФРГ).

экономического обращения Фёль в тесном сотрудничестве с тюбингским физиком Тишнером распространил их на область экономики, причем подробно были освещены особенности народнохозяйственных связей и хода экономических процессов.

Заметим, между прочим, что Фёль энергично защищал точку зрения, согласно которой роль регуляторов в экономике должны играть люди, а не приборы. Математик Кнезер (Тюбинген) на примере теории денежного обращения и общей проблемы полезности разъяснил возможности и трудности исследования народнохозяйственных связей.

Затем слово было предоставлено группе молодых математиков, инженеров и экономистов, которые конкретно изложили возможности привлечения к задачам изучения экономических процессов и их регулирования электронных вычислительных машин, на которых некоторые из них работают сами (Гейер, Франкфурт; Фёрстнер, Гейдельберг; Хенн, Маннгейм; Йенч, Тюбинген; Леземан, Дармштадт).

Председательствующий Ваффеншмидт (Гейдельберг — Маннгейм) старался, насколько возможно, обеспечить при обсуждении координацию технических и экономических, а также теоретических и практических аспектов.

Следует добавить еще несколько слов о значении конференции. Внедрение современной техники в экономику требует ее предварительного математического описания. Оно отодвинуло как историческую, так и, пожалуй, концептуальную школу политической экономии, так как теперь уже не задается, скажем, вопрос: что такое деньги?, а ставятся вопросы: «что они делают», каковы их качественные и количественные функции, каковы перспективы инфляции?

С другой стороны, и хозяйственная практика в свою очередь настоятельно выдвигает задачу функционального рассмотрения. Десяток видных ученых, объединенных в группы, созданные по инициативе Германской исследовательской ассоциации и Союза социальной политики, уже трудится над составлением общего баланса

германского народного хозяйства. Рассчитывают, что система из 40 уравнений с таким же числом неизвестных создаст базу, обеспечивающую порядок и регулирование в экономической жизни. Американские экономисты того же направления (Леонтьев) считают, что для учета всех статей дохода и расхода и всех групп производителей и потребителей в США потребуется в 10 раз большее число переменных и уравнений. Решение подобных систем уравнений может быть получено только при помощи электронных вычислительных машин; разработка необходимого для этого математического аппарата также явилась предметом обсуждения на конференции.

Помимо этого, конференция занималась проблемами народнохозяйственного обращения, включив в рассмотрение и различные конъюнктурные нарушения экономического кругооборота и средства к их устранению.

Полученные результаты, собранные в настоящем сборнике, несомненно явятся важным источником для дальнейшего развития. Публицистам следовало бы «навострить уши», чтобы суметь вовремя информировать читателей о возможных новых и неожиданных результатах. Стоит только вспомнить, что даже профсоюзные деятели, выдвигая требования о повышении заработной платы, стремятся обосновывать их уже не жизненными условиями рабочих, а благоприятным влиянием высокого уровня заработной платы на общее состояние народного хозяйства.

Еще до того, как отчет о настоящей конференции был сдан в набор, ряд вопросов, обсуждавшихся на нашей конференции, неоднократно поднимался в печати, в частности в изданиях «Эконометрического общества» (Econometric Society). Автор настоящего введения в свою очередь старался сделать результаты работы конференции достоянием широкого круга читателей [1]). Посев начинает давать свои всходы.

---

[1]) Waffenschmidt W. G., Wirtschaftsmechanik, Stuttgart, 1956.

ПРОЦЕССЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ТЕХНИКЕ И ИХ ОПИСАНИЕ[1])

В. ОППЕЛЬТ

(Франкфурт-на-Майне)

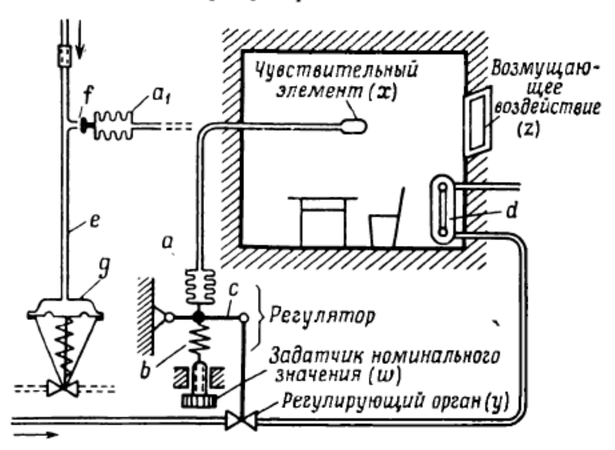
Рассмотрим в качестве примера технического процесса регулирования *регулирование температуры* помещения (фиг. 1). Температура помещения есть величина, подлежащая регулированию, или *регулируемая величина x*. Она регистрируется измерительным прибором. На фиг. 1 в качестве такого прибора изображен газовый термометр, основанный на измерении давления паров. В небольшой колбочке, обозначенной как *чувствительный элемент*, находится легко закипающая жидкость, давление пара которой увеличивается с ростом температуры и, следовательно, может служить мерилом для ее измерения. Пар давит на упругие стенки расширительной камеры *a* и, преодолевая упругую силу пружины *b*, перемещает рычаг *c*. Последний соединен с вентилем, установленным в трубе, ведущей к радиатору водяного отопления *d*. Благодаря этому при повышении комнатной температуры вентиль закрывается, предотвращая тем самым чрезмерное возрастание температуры помещения. Подобным же образом при понижении температуры достигается обратный эффект; в этом случае вентиль отопительной системы открывается регулятором.

Этот пример позволяет изучить все существенные черты регулирующего устройства. Решающее значение для выполнения регулирующих функций имеет образование замкнутого контура — *цепи автоматического регу-*

---

[1]) Oppelt W., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge», стр. 9—21.

лирования. Так, например, повышение температуры приводит к воздействию чувствительного элемента (датчика) на регулирующее устройство, которое перекрывает вентиль в отопительной системе. Это влечет за собой уменьшение подводимой к радиатору тепловой энергии, что в свою очередь влияет на температуру, измеряемую чувствительным элементом, в результате чего происходит замыкание цепи регулирования.



Фиг. 1. Конструктивное выполнение системы регулирования температуры в помещении.

Однако цепь автоматического регулирования не существует изолированно, сама по себе. Регулируемая величина (в нашем примере — температура, измеряемая чувствительным элементом) выступает за пределы цепи и служит для поддержания в помещении требуемых температурных условий, необходимых, например, для хорошего самочувствия его обитателей или для сохранения содержащихся в нем продуктов питания.

Извне в цепь автоматического регулирования также поступают определенные величины. К ним, например, с одной стороны, относятся *возмущающие воздействия* (возмущения), изменения которых, аналогично изменению положения *регулирующего органа*, приводят к

изменению регулируемой величины x, т. е. температуры. В нашем примере такие возмущения возникают, скажем, при открывании окна в комнате, при увеличении или уменьшении интенсивности горения в топке котла, поставляющего горячую воду в отопительную систему, или при изменении температуры наружного воздуха, влияющей через стены комнаты на ее внутреннюю температуру. С другой стороны, номинальное (заданное) значение регулируемой величины, которое система регулирования призвана поддерживать постоянным, также должно вводиться в цепь регулирования извне. В описываемом примере это осуществляется путем большего или меньшего натяжения пружины b при помощи установочного винта — так называемого *задатчика номинального значения* (настройка).

При рассмотрении этой технической системы регулирования с первого взгляда непонятно, каким образом изучение поведения таких устройств может дать результаты, значение которых выходит за рамки такого более или менее случайного сочетания технических приспособлений. Однако это станет яснее, если попытаться отделить процесс регулирования от его случайного конструктивного оформления и выявить его принципиальные закономерности.

На эти закономерности наталкивает нас вопрос о характере величины, циркулирующей в цепи автоматического регулирования. Что передается от одного структурного элемента цепи регулирования к соседнему? Перемещения ли это вещества, как при потоке нагретой воды, при сдвиге столбика газа в термометре или при движении рычага в регулирующем органе? Или это перенос энергии, например, от нагретой воды к воздуху в помещении, или от воздуха к чувствительному элементу термометра?

Мысленный эксперимент поможет нам ответить на этот вопрос. Для этого представим себе, что цепь регулятора разомкнута и вместо его чувствительного элемента в комнате установлен обычный ртутный термометр, за показаниями которого наблюдает специально приставленный к этому человек. Пусть другой человек

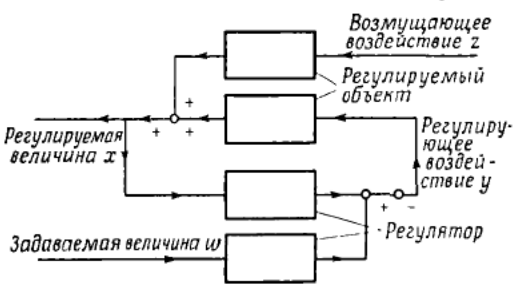
находится у вентиля отопительной системы и производит его установку. Имевшаяся ранее связь между чувствительным элементом и регулирующим органом обеспечивается теперь путем словесных указаний первого человека второму. Этими словесными обращениями, которые, скажем, передаются по телефону, значение имеющейся в данный момент в комнате температуры сообщается человеку, находящемуся у вентиля, который сообразно с полученными сведениями переставляет вентиль в ту или другую сторону.

Устанавливаемая таким путем связь является *информационной* связью: при ее помощи информация о состоянии одного звена цепи регулирования передается следующему звену. Если мы теперь вновь обратимся к нашей физически реализованной цепи регулирования, то увидим, что и задачей технических устройств, входящих в цепь автоматического регулирования, является передача *информации*. В зависимости от технического выполнения отдельных звеньев эта передача информации осуществляется при помощи механических рычагов, потока гидравлической среды, передачи тепла, электрического напряжения или тока или другими средствами.

На основе сказанного выше можно легко изменять конкретное техническое выполнение цепи регулирования, сохраняя самый процесс регулирования неизменным. При этом один прибор, передающий информацию, лишь заменяется другим, осуществляющим передачу информации таким же образом, как и первый. Например, в левой части фиг. 1 цепь от датчика температуры к регулирующему органу заменена пневматической линией e. Расширительная камера a_1 управляет в этом случае выходным отверстием воздушного сопла f в линии e. Если оно закрывается, то давление воздуха в системе возрастает и таким путем информация о закрытии сопла f передается мембранному приводу g, который закрывает вентиль отопительной системы.

Поскольку в цепи автоматического регулирования существенна передача информации, а не более или менее произвольное конструктивное ее выполнение, принято символически изображать цепь автоматического

регулирования схемой потоков информации, так называемой *структурной схемой*, пример которой приведен на фиг. 2. Структурные элементы (звенья), служащие для передачи информации, условно изображаются прямоугольниками («блоками»), связанными между собой линиями потоков информации. Стрелки на соединительных линиях указывают направление потоков информации. Отдельные информации (сообщения) называют *сигналами*. При встрече двух сигналов содержание соответствующих информаций складывается. На схеме это символически изображается небольшим кружком, причем около него указывается знак, с которым соответствующий сигнал должен быть взят при расчете.



Фиг. 2. Структурная схема цепи автоматического регулирования.

Понятия и обозначения, используемые при технических применениях процессов регулирования, нормированы в ФРГ стандартом ДИН-19226: «Техника регулирования». Согласно этому стандарту, сочетание устройств, включающее измерительный прибор (*a* на фиг. 1), устройство для сравнения номинального (заданного) и фактического значений величин и регулирующий орган, называют *регулятором*. Структурная схема, изображенная на фиг. 2, показывает, что регулятор имеет два входа — *регулируемую величину* x и *управляющую (задающую) величину* w. Последняя определяет номинальное значение регулируемой величины, которое должно поддерживаться регулирующим устройством. Регулятор имеет один выход — *регулирующее воздействие* y. Ос-

тальные структурные элементы цепи регулирования объединяются под общим названием *регулируемый объект*.

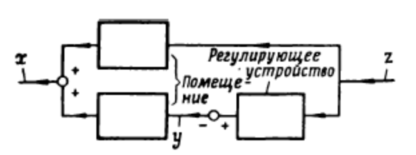
Регулируемый объект, роль которого в примере, изображенном на фиг. 1, играет комната с радиатором водяного отопления, как правило, может работать и без регулятора. Этот объект имеет несколько входов. Одним из них является *регулирующее воздействие* y, другим — *возмущающие воздействия* z. На фиг. 2 изображено лишь одно возмущающее воздействие. Выходом регулируемого объекта является регулируемая величина x.

Какая из величин, поступающих в цепь регулирования извне, является возмущающим воздействием и какая — управляющим параметром (задаваемой величиной), на основании физико-технического выполнения регулирующего устройства определить нельзя. Это определяется постановкой задачи. То же самое относится и к различию между регулируемой величиной и регулирующим воздействием. До тех пор пока задача регулирующего устройства не известна, можно, следовательно, различать лишь воздействия, поступающие извне, и величины, циркулирующие внутри цепи регулирования.

Структурная схема дает полное представление о структуре рассматриваемой цепи автоматического регулирования. Это хорошо видно при сравнении фиг. 1 с фиг. 2. Каждое звено (структурный элемент) имеет один вход и один выход. Сигнал передается только в направлении от входа к выходу системы, следовательно, структурные элементы являются *направленными (звенья направленного действия)*. Извне в цепь регулирования поступают возмущения z и задаваемая величина w. Наружу из цепи выходит регулируемая величина x. Между регулятором и регулируемым объектом цепь замыкается через регулируемую величину и регулирующее воздействие.

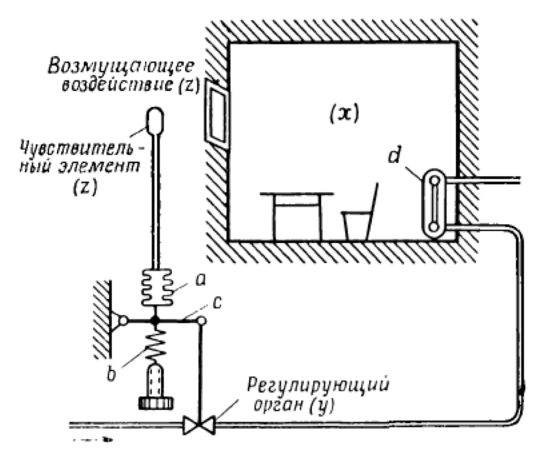
Следует еще отметить, что при прохождении цепи регулирования происходит изменение знака сигнала, что символически изображено на схеме фиг. 2 кружком со значками + и —. Изменение знака необходимо, чтобы добиться желаемого регулирующего действия. Так, например, на фиг. 1 понижение температуры помещения,

вызванное, скажем, открытием окна, должно при посредстве регулятора вызвать открытие вентиля отопительной системы и тем самым через радиатор привести к повышению температуры в помещении, чтобы вернуть ее на прежний уровень. Но имеются и такие схемы, в которых не предусмотрена перемена знака. Это имеет место, например, в генераторах, в которых в результате циркуляции сигнала должны поддерживаться установившиеся колебания.



Фиг. 3. Структурная схема параллельного включения двух звеньев.

Кроме схем регулирования, представленных на фиг. 1 и 2, в технике известны и другие возможные схемы



Фиг. 4. Конструктивное выполнение системы управления теплоотдачей радиатора водяного отопления в зависимости от температуры наружного воздуха.

соединения звеньев направленного действия. Так, например, на фиг. 3 показано параллельное соединение двух звеньев, которому в конкретном техническом воплоще-

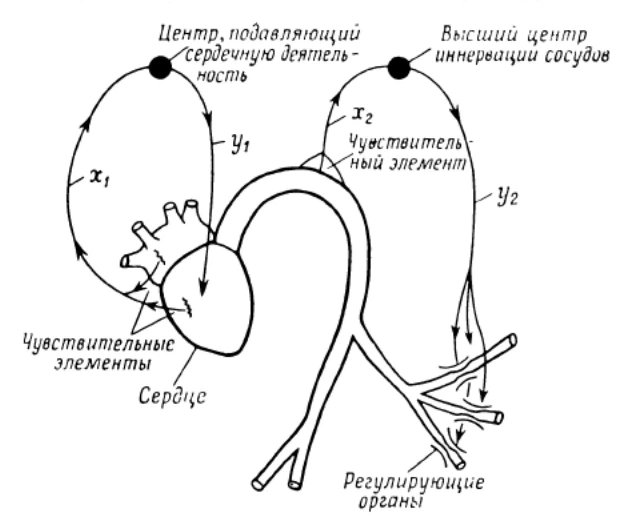
нии соответствует система, изображенная на фиг. 4. В этом случае прибор измеряет температуру наружного воздуха, т. е. возмущение z, после чего производится соответствующее изменение регулирующего воздействия. При помощи такого устройства можно исключить вредное влияние наружной температуры на температуру воздуха в помещении, так как при повышении наружной температуры прибор прикрывает вентиль отопительной системы.

В то время как в цепи автоматического регулирования, представленной на фиг. 1 и 2, регистрируется любое отклонение регулируемой величины от заданного номинального значения и вслед за этим обеспечивается необходимое вмешательство, цепь, соответствующая фиг. 3 и 4, осуществляет подобное вмешательство только при изменении измеряемого возмущения. Другие изменения, например открытие окна, беспрепятственно оказывают воздействие на температуру воздуха в помещении. Такие устройства, не имеющие замкнутой цепи регулирования и состоящие из последовательно или параллельно включенных звеньев направленного действия, называются *разомкнутыми системами автоматического регулирования.*

В крупных установках часто имеется несколько цепей регулирования и каскадов управления, которые оказывают друг на друга влияние, т. е. «связаны» между собой. Так, например, в случае, изображенном на фиг. 1, можно было бы себе представить еще одну цепь регулирования, которая подключена к отопительному котлу, измеряет там температуру нагретой воды и переставляет воздушные заслонки в топке котла. Или же можно было бы сконструировать некую комбинацию из систем, изображенных на фиг. 2 и 3, так, чтобы регулирующее устройство регистрировало наряду с комнатной температурой и температуру наружного воздуха (как главное возмущающее воздействие) и поэтому переставляло бы и вентиль отопительной системы, не ожидая, пока температура воздуха в комнате понизится в результате понижения температуры наружного воздуха. Этим обеспечивалось бы более точное регулирование. Такие системы называются *системами регулирования по воздействию.*

ПРИМЕР ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ ИЗ БИОЛОГИИ

Природа является учителем человека и в области регулирования. Процессы регулирования встречаются повсеместно во всем органическом мире, и имеются даже попытки считать наличие процессов регулирования первичным признаком жизни [1]. Но естественные процессы регулирования по своей структурной схеме

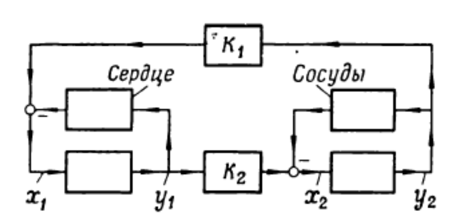


Фиг. 5. Схема регуляции кровяного давления в животном организме.

большей частью гораздо теснее переплетены между собой, чем это имеет место в регулирующих устройствах, созданных рукою человека.

Рассмотрим фиг. 5, на которой изображена сильно упрощенная схема регуляции кровообращения в животном организме [1]. Легко видеть, что в этом случае имеется две цепи регулирования. Первая регулирует количество крови, выталкиваемой с каждым сокращением сердца (так называемый *систолический объем сердца).* При этом чувствительные к кровяному давлению вну-

тренние рецепторы сердца воздействуют через нервные пути на центр, подавляющий сердечную деятельность, который по другим нервным путям оказывает воздействие на сердечную мышцу. Вторая цепь регулирования при помощи чувствительных к кровяному давлению органов контролирует давление крови в верхней дуге аорты, от которой по нервным путям передается соответствующий сигнал к верхнему центру сосудистой системы в спинном мозге. Этот центр по другим нервным путям воздействует на регулирующие органы — мышечные волокна, которые, будучи расположены на отдельных венозных сосудах изменяют их *проходное сечение* («просвет» сосудов).



Фиг. 6. Структурная схема регуляции кровяного давления.

Взаимная связь этих двух цепей из схематического рисунка, изображенного на фиг. 5, непосредственно не видна, но она становится ясной при рассмотрении структурной схемы, показанной на фиг. 6. Любое изменение просвета вены (y_2) сказывается не только на чувствительном элементе (x_2) в дуге аорты, но и непосредственно на кровяном давлении (x_1) в желудочке сердца. На структурной схеме это выражается во взаимной связи сигналов, характеризуемой коэффициентом K_1. Аналогично и изменение систолического объема сердца (y_1) проявляется не только в самом сердце (x_1); его действие распространяется вплоть до главной артерии, изменяя величину x_2. Это приводит к взаимной связи сигналов, характеризуемой коэффициентом K_2.

Однако процессы регулирования имеют место не только в «клеточном государстве» отдельного организма, но и в состоящих из отдельных особей животных ассоциациях. В этом отношении подробно изучены условия в сообществах насекомых [2]. Так, например, в пчелином улье пчелам удается очень точно поддерживать

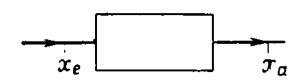
постоянный уровень температуры, причем между отдельными пчелиными индивидуумами осуществляется весьма искусная система сигнализации. Аналогичные условия наблюдаются и в других колониях насекомых.

Нужно ли после этого удивляться предпринимаемым попыткам исследовать и общественные отношения людей с помощью схемы потоков информации, использовав для этих целей средства и методы, зарекомендовавшие себя в области регулирования технических процессов. Пожалуй, наиболее подходящим объектом подобных исследований могут стать народнохозяйственные связи в человеческом обществе.

Однако прежде чем подробнее заняться этой темой, нам придется вкратце осветить проблемы и методы теории регулирования в технике. Подробное изложение этих вопросов дано в докладе Г. Тишнера (см. стр. 122 настоящего сборника).

ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Мы уже видели, что сущность процесса регулирования можно отделить от его конкретного конструктивного воплощения и свести к структурной схеме, изображающей потоки информации. Сведения о протекании процесса регулирования и о его характерных особенностях можно получить из математической записи зависимостей, существующих в цепи регулирования. При этом необходимо начать с уравнений отдельных звеньев системы регулирования. Для этого нужно установить соотношения, подчиняясь которым выходная величина x_a в цепи автоматического регулирования следует за изменениями входной величины x_e (фиг. 7).



Фиг. 7. Поток информации через одиночное звено цепи автоматического регулирования.

Соответствующие соотношения можно получить, если составить уравнения движения отдельных звеньев цепи.

Для этого, разумеется, надо знать их конструктивное выполнение. В случае механических звеньев, например, для вывода уравнений можно воспользоваться законом Ньютона, в случае электрических звеньев — обобщенным законом Ома, в случае тепловых систем — законами теплопередачи и т. д. Записав полученные таким путем соотношения в порядке убывания членов, мы убеждаемся, что для малых отклонений от стационарного режима эти уравнения поддаются линеаризации, после чего они в большинстве случаев могут быть представлены в виде линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\ldots a_2 x''_a(t) + a_1 x'_a(t) + a_0 x_a(t) = b_0 x_e(t) + b_1 x'_e(t) + \ldots \quad (1)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, ... в этом уравнении представляют собой постоянные, зависящие от размеров и других параметров соответствующего звена в цепи автоматического регулирования. Штрихи у переменных означают производные по времени t.

Как правило, уравнение (1) содержит не все указанные постоянные. Поэтому принято подразделять звенья цепи автоматического регулирования в соответствии с формой описывающих их уравнений на три основных типа:

Пропорциональное (усилительное) звено:

$$a_0 x_a(t) = b_0 x_e(t). \quad (2)$$

Интегрирующее звено:

$$a_1 x'_a(t) = b_0 x_e(t),$$

т. е.

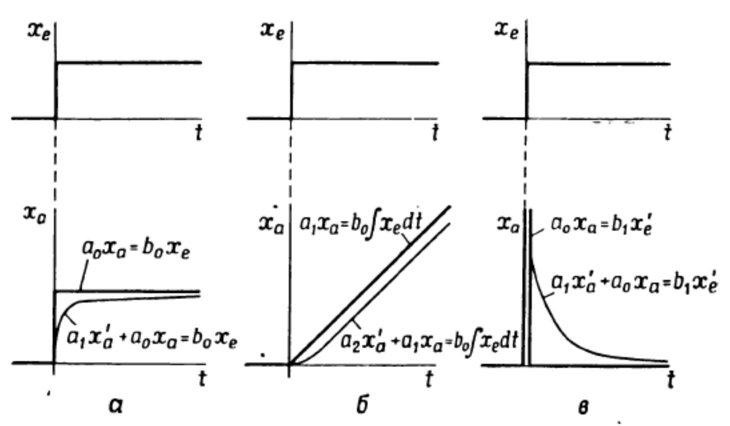
$$a_1 x_a(t) = b_0 \int x_e(t)\,dt. \quad (3)$$

Дифференцирующее звено:

$$a_0 x_a(t) = b_1 x'_e(t). \quad (4)$$

Чтобы составить себе более четкое представление о поведении звеньев в цепи автоматического регулирования, рассмотрим решения $x_a(t)$ уравнений (2)—(4),

которые получатся, если в момент $t = 0$ скачком изменить входную величину x_e на единицу. Эту зависимость называют *переходной функцией* цепи регулирования. На фиг. 8 изображены переходные функции типичных звеньев. Из приведенных графиков видно также, что добавление производных по времени от выходной величины: $x'_a(t)$, $x''_a(t)$ и т. д., — приводит к *запаздыванию*



Фиг. 8. Переходные функции типичных звеньев системы автоматического регулирования.

а — пропорциональное звено; *б* — интегрирующее звено; *в* — дифференцирующее звено.

в ходе переходной функции. Такие звенья поэтому иногда называют *запаздывающими*.

Если известны уравнения всех звеньев цепи автоматического регулирования, то легко исключить из системы уравнений промежуточные величины и получить одно дифференциальное уравнение, содержащее лишь регулируемую величину x, задаваемую величину w и возмущающее воздействие z. Это уравнение имеет вид

$$A_3 x'''(t) + A_2 x''(t) + A_1 x'(t) + A_0 x(t) =$$
$$= B_0 w(t) + B_1 w'(t) + \ldots + C_0 z(t) + C_1 z'(t) + \ldots \qquad (5)$$

Его решение определяет искомую регулируемую величину $x(t)$.

Для математического аппарата теории регулирования характерно стремление избежать полного решения уравнения (5). Сама задача ставится в такой форме, чтобы ее решение не предполагало необходимости полного решения уравнения (5).

Это становится возможным, в частности, благодаря тому, что при проектировании системы регулирования имеется широкая свобода выбора параметров отдельных приборов, что является характерной особенностью технических задач регулирования. В противоположность этому в задачах регулирования биологических или экономических процессов параметры, как правило, заданы заранее. Тем не менее и здесь можно найти такую постановку задачи, при которой ее решение может быть получено без полного решения уравнения (5).

Это имеет место, например, если ставится вопрос об *устойчивости* движения, предписываемого уравнением (5). Под устойчивым процессом мы понимаем такой процесс, который после малого возмущения снова приходит в установившееся состояние. Для обеспечения устойчивости системы достаточно, чтобы коэффициенты A_i в уравнении (5) удовлетворяли определенным условиям. Эти условия таковы:

1. Уравнение (5) должно содержать полный набор коэффициентов A_i, которые все должны иметь одинаковый знак. Тем самым исключается так называемая «монотонная» неустойчивость (апериодически расходящийся процесс), при которой система все более удаляется от среднего положения до тех пор, пока этому удалению не поставят пределы ограничения.

2. Помимо этого, должна быть предотвращена и «колебательная» неустойчивость, при которой система начинает совершать периодические колебания около некоторого положения равновесия. Для дифференциальных уравнений первого и второго порядка условия 1 достаточно и для обеспечения «колебательной» устойчивости. В случае же уравнений третьего порядка помимо этого должно быть выполнено еще условие

$$A_0A_3 - A_1A_2 < 0, \qquad (6)$$

а в случае уравнений четвертого порядка — условие

$$A_4A_1^2 + A_0A_3^2 - A_1A_2A_3 < 0. \qquad (7)$$

Соответствующие условия существуют и для уравнений более высоких порядков [1]) [5].

С помощью этих соотношений при исследовании систем регулирования можно исключить из рассмотрения такие процессы, которые не приводят к устойчивому состоянию и поэтому не пригодны для целей регулирования. Приведенные соотношения показывают также, каким образом в случае необходимости должны быть изменены отдельные коэффициенты A_i, чтобы обеспечить устойчивость системы, и дают тем самым необходимые указания для синтеза цепей автоматического регулирования.

Для проведения целого ряда исследований экспериментального или математического характера необходимо разомкнуть замкнутую цепь регулирования или по крайней мере мысленно представить ее разомкнутой в каком-то месте. Тогда получается цепочка, состоящая из отдельных звеньев и имеющая вход и выход, для которой может быть определена переходная функция. Как показал Кюпфмюллер, эта переходная функция *разомкнутой цепи* по своей форме должна удовлетворять определенным условиям для того, чтобы замкнутая система была устойчива. Эти условия также дают определенные указания для синтеза оптимальных систем регулирования.

Однако более всего теоретическому рассмотрению процессов регулирования способствовало развитие *метода частотных характеристик*. «Перевод на язык колебаний» — привычная форма мышления для инженера, и он пытается применить этот метод к процессам регулирования. Например, полную картину поведения звена в цепи автоматического регулирования можно получить не только из уравнения (1) или переходной функции, изображенной на фиг. 8, но и в том случае, если

---

1) Эти условия носят название условий Рауса — Гурвица. — *Прим. ред.*

последовательно подавать на вход системы колебания различной частоты от нуля до бесконечности, каждый раз давая системе прийти в установившееся состояние и регистрируя затем амплитуду и фазу установившихся колебаний выходной величины.

Поскольку мы с самого начала ограничили рассмотрение линейными системами, частота колебаний на выходе системы в установившемся режиме должна быть равна частоте колебаний на входе. Тем самым легко получить амплитуду и фазу колебаний из уравнения (1) независимо от его порядка. Поэтому нетрудно определять частотные характеристики даже для сложных систем, встречающихся в технике связи. После того как Г. Найквист [1]) указал метод, с помощью которого по графику частотной характеристики можно судить об устойчивости системы, были развиты многочисленные стандартные приемы, которые позволяют производить расчет важнейших параметров цепи автоматического регулирования с наименьшей затратой времени и сил.

ПРИМЕР ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЦЕПИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Хотя применение метода частотных характеристик предполагает наличие определенных навыков и знаний, мы все же попытаемся на примере пояснить одну из его графических форм. Для этого воспользуемся зависимостью, известной в экономической литературе под названием *свиного цикла*.

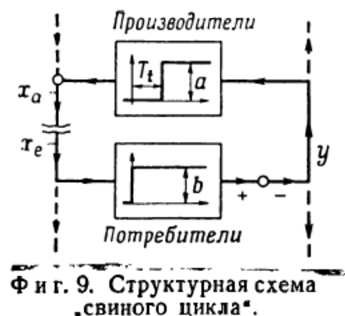
Нашей первой задачей будет представить эту зависимость в виде схемы потока информации. Обозначим через x — численность поголовья свиней в некотором, по предположению, замкнутом районе, а через y — цену на свиней; цена влияет на численность поголовья свиней, а последняя в свою очередь — на цену. Оба влияния осуществляются по различным каналам: первое в основном

[1]) Этот метод был обобщен и распространен на системы автоматического регулирования А. В. Михайловым. — *Прим. ред.*

3 Зак. 2575

через сельское население, занятое разведением свиней, второе — через потребителей. Мы получаем при этом замкнутый поток информации (сигналов), изображенный на фиг. 9. Каждый из сигналов — цена на свиней и поголовье свиней — выходит за пределы этой замкнутой цепи и оказывает воздействие на другие зависимости. Извне в цепь тоже поступают сигналы, например цена на корм z, которая также влияет на численность поголовья свиней.

Схема потоков информации, представленная этой цепью, содержит одну перемену знака, так как возрастание поголовья свиней x уменьшает цену y, в то время как повышение цены увеличивает и численность поголовья свиней.



Фиг. 9. Структурная схема „свиного цикла“.

Для дальнейшего анализа нам придется сделать определенные предположения относительно поведения отдельных звеньев нашей цепи. Относительно потребителей предположим, что они реагируют на увеличение x поголовья свиней пропорциональным понижением цен, причем будем считать, что один процесс следует за другим без существенного запаздывания во времени. Следовательно, имеем

$$y(t) = -bx(t), \tag{8}$$

где b — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность *цена/численность поголовья.*

Несколько труднее представить в математическом виде поведение производителей. Если предположить, что они также стремятся увеличивать поголовье свиней пропорционально росту их рыночной цены, то теперь все же должен пройти определенный промежуток времени, прежде чем будут выращены годные для продажи животные.

Аналогичная ситуация создается и в технических системах регулирования, если в их структурных элементах

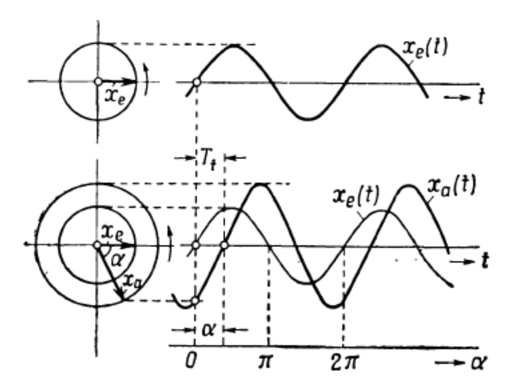
скорости распространения сигналов конечны. Этот фиксированный интервал времени называют *временем запаздывания* и обозначают символом T_t. На фиг. 9 изображена передаточная функция системы с запаздыванием. Таким образом, для производителей справедливо соотношение

$$x(t+T_t)=ay(t), \tag{9}$$

где a снова означает коэффициент пропорциональности (размерность: *численность поголовья/цена*). Это уравнение показывает, что величина x в момент времени $t+$ $+T_t$ принимает значение ay, имевшееся в момент времени t.

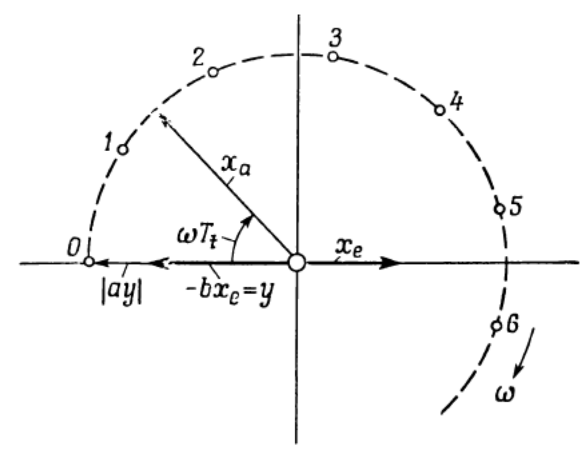
Особым преимуществом частотного представления является то, что оно позволяет просто учесть и время запаздывания. Мы воспользуемся здесь графическим методом и предположим, что цепь потока информации разомкнута в точке, соответствующей величине x. Тогда в этом месте появляются выходная величина x_a и входная величина x_e. Предположим, что какими-то искусственными мерами величина x приведена в колебания с заданной частотой $f=\omega/2\pi$. Пусть амплитуда этих колебаний равна $|x_e|$. Обозначим ее на графике фиг. 10 вектором длины $|x_e|$. Представим себе, что этот вектор вращается с частотой f, т. е. с угловой скоростью $\omega=$ $=2\pi f$ (или с круговой частотой ω). Тогда при взгляде сбоку на вращающийся вектор колебания будут представляться нам как движение конца вектора вверх и вниз. Как увидим ниже, в дальнейшем для нас будет иметь значение лишь этот вектор, а не сами колебания. Дело в том, что выходная величина x_a также будет совершать колебания с той же частотой. Мы и ее изобразим соответствующим вектором (см. фиг. 10), имеющим длину, равную амплитуде $|x_a|$, но сдвинутым относительно входного колебания x_e на фазовый угол α.

Определим положение вектора x_a. Для этой цели нанесем на фиг. 11 вектор x_e и найдем вектор y. Согласно уравнению (8), этот вектор должен иметь абсолютную величину $b|x_e|$ и отрицательное направление по отношению к вектору x. Амплитуда (абсолютная



Фиг. 10. Представление колебаний при помощи векторов.

величина) вектора x_a получается из уравнения (9) равной $a|y|=ab|x_e|$. Сдвиг во времени между обоими колебаниями y и x_a постоянен и равен T_t. Поскольку угловая



Фиг. 11. Векторная диаграмма „свипого цикла".

скорость вращения вектора равна ω, он при вращении поворачивается на угол ωt. Следовательно, за время T_t он смещается на угол ωT_t, который и представляет со-

бой угол сдвига между векторами x_a и y. Если отметить на графике положения конца вектора для различных круговых частот $\omega = 1, 2, 3, \ldots$, то получим окружность, изображенную на фиг. 11 пунктиром.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости замкнутой системы; предположим, что параметры цепи регулирования a, b и T_t выбраны с таким расчетом, чтобы эта окружность как раз находилась на границе колебательной устойчивости, так что, будучи предоставлена самой себе, система должна совершать установившиеся колебания постоянной амплитуды. Так как для замкнутой цепи $x_a = x_e = x$, то на векторной диаграмме фиг. 11 векторы x_a и x_e также должны совпадать. Но это, очевидно, возможно только в том случае, если круговая частота равна так называемой критической частоте ω_k, для которой угол ωT_t становится равным π, 3π, 5π и т. д. По некоторым другим соображениям, на которых мы здесь останавливаться не будем, значения 3π, 5π и т. д. отпадают, так что имеем $\omega_k = \pi / T_t$. Следовательно, период этих колебаний T_k определяется формулой

$$T_k = \frac{1}{f_k} = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi}{\pi} T_t = 2T_t. \tag{10}$$

Для амплитуд имеем равенство $|x_a| = |x_e|$, откуда $ab|x_e| = |x_e|$, т. е.

$$ab = 1. \tag{11}$$

Уравнение (11) справедливо для границы устойчивости. Можно показать, что область устойчивости соответствует условию $ab < 1$. Как известно, в действительности удалось преодолеть «свиной цикл» путем разъяснения производителям механизма этого кругооборота. Проделанная разъяснительная работа привела к уменьшению величины константы a.

В данной работе сделана попытка без привлечения сложного аппарата, требующего наличия специальных знаний, показать пути и методы, которыми пользуется инженер при исследовании и расчете процессов регулирования. Конечно, данное изложение весьма неполно. Наиболее существенное ограничение накладывает

требование линеаризации процессов, которая допустима только для колебаний малой амплитуды. Действительные процессы регулирования во многих случаях нелинейны. Например, неустойчивые колебания, которые в линейной области должны были бы возрастать до сколь угодно больших значений амплитуд, в действительности прекращают рост при конечных амплитудах.

С течением времени область, охватываемая техникой автоматического регулирования, настолько расширилась, что получить представление о ней можно только путем детального изучения литературы. Кроме того, при современных методах исследования во все возрастающем масштабе начинают использовать так называемые *моделирующие* устройства, при помощи которых можно непосредственно построить модель реальной системы и эмпирически изучить ее поведение. Более подробно этот чрезвычайно важный метод рассматривается в докладе К. Леземана (см. стр. 178 настоящего сборника).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner R., Probleme und Beispiele biologischer Regelung, Stuttgart, 1954.
2. Regelungsvorgänge in der Biologie, München, 1956; русский перевод см.: «Процессы регулирования в биологии», Издательство иностранной литературы, 1960, стр. 178—195.
3. Engel F. V. A., Oldenbourg R. C., Mittelbare Regler und Regelanlagen, Berlin, 1944.
4. Hänny J., Regelungstheorie, Zürich, 1947.
5. Leonhard A., Die selbsttätige Regelung, Springer, 1949.
6. Oldenbourg R. C., Sartorius H., Dynamik selbsttätiger Regelungen, München, 1951; русский перевод см.: Ольденбург Р., Сарториус Г., Динамика автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1949.
7. Oppelt W., Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, Weinheim, 1956; русский перевод см.: Оппельт В., Основы техники автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1960.
8. Profos P., Vektorielle Regeltheorie, Zürich, 1954.
9. Schäfer O., Grundlagen der selbsttätigen Regelung, München, 1953.

ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ КАК СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ [1])

Г. ГЕЙЕР

(Франкфурт-на-Майне)

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

I

Недавние исследования в самых различных областях науки и техники привели к установлению систем, которые по своему формальному строению обнаруживают поразительное сходство. К физическим, техническим, биологическим и многим другим процессам оказалось возможным применить один и тот же метод теоретического анализа, который обещает быть столь же плодотворным и в применении к экономическим проблемам [1—3]. Появившиеся до сих пор работы [4] [2]) уже позволяют заключить, что, в частности, народнохозяйственные процессы можно успешно объяснить на основе теории автоматического регулирования.

Укрупненные экономические показатели и их взаимные функциональные связи во времени можно представить в виде цепей автоматического регулирования, если они относятся к области, в которой средние величины подчиняются статистическим закономерностям, иными словами, если эти укрупненные экономические показатели по меньшей мере настолько широки, что допустимо предположение о воспроизводимости во времени их функциональных связей.

Макроэкономические процессы базируются на деятельности экономических субъектов всего народного хозяйства. Например, они описывают создание, распреде-

---

[1]) Geyer H., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge», стр. 22—48.

[2]) См. также библиографию, приведенную в работе [4].

ление и потребление всего национального дохода, совокупность всех капиталовложений в народное хозяйство, затраты на личное потребление всех экономических субъектов и т. д. Поэтому можно ожидать, что для них гораздо чаще будет выполняться сформулированное выше условие воспроизводимости функциональных связей, чем для микроэкономических процессов. Пока макроэкономические отношения являются результатом деятельности экономических субъектов при режиме свободной от государственного вмешательства, не полностью монополизированной экономики, индивидуальные решения никоим образом не нарушают воспроизводимости функциональных связей. Иное дело в случае микроэкономических процессов, т. е. процессов, происходящих в пределах отдельных предприятий, рынков или даже их частей. В этом случае решения отдельных индивидуумов, если их действия существенно влияют на рассматриваемую величину, могут уменьшить или даже совсем ликвидировать свойство воспроизводимости во времени.

Надо сказать, что экономическая теория опирается на солидные традиции анализа поведения отдельных экономических субъектов. Однако ее результаты непрерывно подвергаются серьезной критике в отношении вероятности выдвигаемых ею мотивов экономического поведения. Поэтому микроэкономические процессы можно будет объяснить на основе теории автоматического регулирования только после тщательной проверки правильности допущения о постоянстве протекания этих процессов во времени.

Следует особо подчеркнуть, что закономерности, найденные для одной какой-либо области исследования, ни в коем случае нельзя непосредственно распространять на другую область. Даже если бы было доказано, что все микроэкономические процессы представляют собой устойчивые системы автоматического регулирования, это еще отнюдь не означало бы, что народнохозяйственные цепи регулирования также непременно будут устойчивыми. Последние представляют собой самостоятельные системы взаимных связей, которым присущи особые закономерности, и об их отношении к микроэкономиче-

ским закономерностям можно лишь в немногих редких случаях делать сколько-нибудь надежные утверждения.

2

Чтобы полностью уяснить это, следует вспомнить, что историческая эволюция от средневекового хозяйства городов до экономики больших территорий, проявляющейся в наши дни в тесном переплетении национальной и мировой экономики, характеризовалась радикальными переворотами в экономических отношениях. Широко известно, что во многих областях коренные изменения техники производства сопровождались переворотами в экономическом мышлении и методах хозяйствования.

Однако для перехода от производства, рассчитанного преимущественно на удовлетворение собственных потребностей или запросов персонально известных клиентов, к производству на безличный рынок, гораздо более характерно другое обстоятельство. Индустриализация производства создала сложную сеть взаимных связей, переплетенных между собой в таких масштабах, какие едва ли можно встретить в прежние эпохи экономического развития. Конечно, прошлые стадии хозяйственного развития тоже не были вполне свободны от взаимных связей, но последние, как правило, не оказывали существенного влияния на структуру производства для удовлетворения человеческих потребностей. В большинстве случаев участвующие в производстве звенья народного хозяйства были связаны друг с другом таким образом, что изменение одной экономической величины непосредственно определяло лишь хозяйственную деятельность следующего звена и только вслед за этим последовательно оказывало свое действие на другие звенья разомкнутой цепи — до тех пор, пока, наконец, его воздействие не оказывалось столь незначительным, что уже не воспринималось последним звеном этой цепочки взаимодействий.

На языке инженера это можно выразить следующим образом. Для экономики позднего средневековья и ранней стадии индустриализирующейся экономики эпохи меркантилизма было характерно наличие либо замкнутых цепей регулирования, которые были устойчивы и не иг-

рали особой роли, либо систем управления, осуществляемых разомкнутыми цепями взаимодействий.

В результате создания значительных индустриальных мощностей уже в период раннекапиталистического развития выкристаллизовались современные структурные отношения народнохозяйственного разделения труда, которые растут вширь и вглубь благодаря новым капиталовложениям и дальнейшему совершенствованию техники производства.

При сложившихся в настоящее время структурных взаимоотношениях оказалось целесообразным положить в основу наших экономических решений модель народнохозяйственного процесса, которая описывается цепью регулирования, имеющей тенденцию к неустойчивости. Это может показаться неожиданным. Однако уже беглый обзор истории экономических учений показывает, сколь существенными выводами экономической теории подкрепляется такая обобщающая оценка структуры современного народного хозяйства.

Излагаемая здесь точка зрения, конечно, была бы более обоснованной, если бы удалось показать, что она приводит к созданию практически особенно пригодных моделей. Однако для этого существующие в настоящее время довольно несовершенные модели необходимо было бы дополнить и подвергнуть проверке на основании эконометрических исследований. Но современной экономической теории до сих пор не удалось вполне удовлетворительно справиться с этой задачей.

Поэтому для обоснования нашего тезиса остается лишь доказать его преемственную связь со всем ходом предыдущего развития теоретической экономической мысли.

Изложение истории экономических учений здесь по необходимости будет кратким и во многом неполным. Однако будет показано, что положения двух важных теорий экономических процессов можно рассматривать с точки зрения цепей автоматического регулирования. Мы, естественно, вынуждены дать весьма упрощенное изложение проблем. Тем не менее мы докажем, что более ранняя из этих двух теорий описывает безусловно устойчивую систему, в то время как более поздняя тео-

рия для весьма широкой области, которую одновременно следует признать и вероятной областью, описывает неустойчивую систему. Доказательство того, что народнохозяйственный процесс можно представить как процесс автоматического регулирования, и критический разбор вытекающих отсюда следствий позволят нам в конечном счете перейти к критике понятия устойчивости, используемого в технике, и сделать некоторые выводы, касающиеся проблемы стабилизации экономического развития.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

1

Время зарождения защищаемой нами точки зрения следует отнести к периоду конца меркантилизма. Это время часто рассматривают как начало возникновения теоретических систем политической экономии. Примерно 200 лет назад — через 40 лет после открытия кровообращения у человека — французский врач Франсуа Кенэ последовательно применил идею замкнутого кругооборота к экономическим отношениям. Его схема кругооборота должна была отобразить экономические взаимоотношения различных классов современной ему экономической формации. Эта схема была стационарной, т. е. Кенэ предполагал, что экономические процессы цикл за циклом одинаковым образом себя воспроизводят.

Поскольку в области политической экономии экономические теоремы и политические доктрины, как правило, тесно связаны между собой, несостоятельность выводов, поспешно извлекаемых из экономических положений, часто приводила к осуждению и полному отрицанию самих этих теорем. Идеи экономического кругооборота физиократов постигла та же участь, и в результате вплоть до новейшего времени разработанным Кенэ принципам теоретического описания экономических отношений уделялось сравнительно мало внимания.

Примерно 60 лет спустя английский политэконом Давид Рикардо [5], опираясь на идеи Адама Смита и Ж. Б. Сэя, на которых мы здесь останавливаться не

будем, развил классическую систему динамики народного хозяйства. Это и есть упомянутая нами выше ранняя теория. Поскольку эта теория имеет большое значение для теоретической экономики и экономической политики, мы рассмотрим ее несколько подробнее. Однако, имея в виду наши цели, мы должны будем четко разграничить две стороны учения Рикардо. Разработанная Рикардо трудовая теория стоимости пыталась обосновать структурные взаимоотношения в экономической жизни актами обмена, подчиняющимися экономическому закону. На деле развитие экономики определяется совместным действием производственно-технических, экономико-демографических (т. е. связанных с динамикой народонаселения), чисто экономических и социально-экономических факторов. В нашей модели динамики народного хозяйства находит отражение лишь последняя группа факторов. Это переплетение различных видов взаимных связей, или, выражаясь более общим языком, переплетение функциональных связей «различных измерений» в сложную цепь взаимодействий, показывает, что эти взаимные связи нельзя представить в виде одной схемы потока энергии.

Динамика экономического процесса, развитая Рикардо, выходит в этом отношении далеко за рамки мышления Кенэ. Однако и ей присущи черты, которые с точки зрения современной экономической науки заставляют рассматривать ее как одну из форм классически-либеральной теории развития, которая ближе стоит к концепциям физиократов, чем к нашему образу мышления, ибо она также постулирует устойчивость социально-экономического процесса.

2

При попытке воссоздать агрегированную модель из теории Рикардо [1]) следует прежде всего решить, каким

[1]) Точности ради, укажем, что из чисто словесных утверждений Рикардо наверняка можно вывести не одну, а несколько различных систем. Мы надеемся, однако, что предлагаемая нами упрощенная модель социально-экономической динамики способна выдержать критику, тем более, что другие авторы сделали аналогичные выводы из теорем классической политэкономии (ср. [6, 7]).

методом анализа мы при этом хотим воспользоваться. Чтобы наглядно представить себе различие в выводах, получающихся при различных способах рассмотрения, мы дадим описание системы Рикардо как с помощью конечно-разностных, так и с помощью дифференциальных уравнений.

Системы уравнений в конечных разностях представляют собой аппарат, нашедший широкое применение при рассмотрении народнохозяйственных динамических проблем. При этом методе измеряется каждая величина за некоторый n-й период (цикл) и затем сопоставляется с другими величинами за тот же или более ранний период.

Согласно Рикардо, прибыли в народном хозяйстве страны за какой-либо период определяются конечным продуктом [1]) народного хозяйства за вычетом суммы заработной платы ([5], гл. I, часть VII; гл. VI), необходимой для поддержания жизнедеятельности рабочих, изготовивших этот продукт.

Отсюда получается соотношение

$$G(n) = P(n) - L^s(n), \qquad (1)$$

где G — прибыли, P — конечный продукт и L^s — совокупный фонд заработной платы, необходимый для поддержания жизни рабочего населения.

Этот фонд заработной платы, выплачиваемой за один цикл производства, должен быть пропорционален числу людей ([5], гл. V). Поэтому имеем

$$L^s(n) = lM(n). \qquad (2)$$

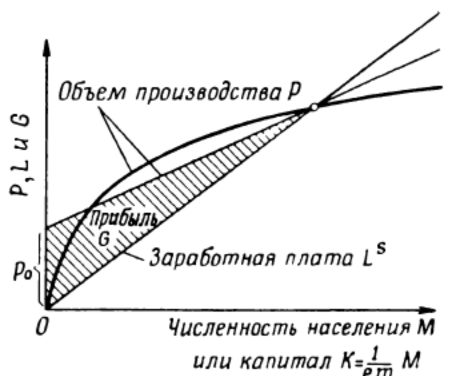
Согласно рикардианскому закону производства, конечный продукт определяется исключительно производительностью имеющихся ресурсов. В этих условиях дополнительные затраты обоих факторов производства —

[1]) Конечный продукт равен национальному доходу за вычетом ренты, выплачиваемой землевладельцам. Анализ ренты можно исключить из рассмотрения, так как, по Рикардо, класс землевладельцев не играет активной роли в экономической динамике. (В данном контексте конечный продукт исключает амортизацию. — *Прим. ред.*)

труда и капитала — приводят к постоянно уменьшающемуся приросту дохода ([5], гл. V, VIII). Чтобы получить возможность исследовать на модели эту по существу нелинейную зависимость, мы ее линеаризуем, что приводит к соотношению

$$P(n) = pM(n) + P_0, \tag{3}$$

где M — численность рабочего населения, а P_0 — постоянная (фиг. 1). Величина p означает тангенс угла наклона линеаризированной функции конечного продукта.



Фиг. 1. Структурные связи классической динамики.

Рикардо считал, что спрос на рабочую силу всегда и при всех условиях соответствует наличным предметам потребления для поддержания жизни ([5], гл. XXI). Эти предметы потребления представлены наличным капиталом, так как он олицетворяет вложенную в производство долю общественного богатства страны и состоит из средств производства и количества предметов потребления, необходимого для поддержания рабочей силы ([5], гл. V). Изменение величины капитала соответствующим образом обусловливает изменение численности населения ([5], гл. II). Влияние изменений величины капитала проявляется при этом прежде всего в различии между рыночным и минимально необходимым фондами заработной платы, т. е. между теми суммами заработной платы, которые действительно могут быть выплачены на рынке труда при наличном капитале, и теми суммами, которые требуются для поддержания жизни рабочих в соответствии с их числом и производительностью их труда ([5], гл. V). Тогда превышение рыночного фонда заработной платы над мини-

мально необходимым в свою очередь вызывает рост численности населения.

Эти утверждения легко записать в математическом виде. Изменение численности населения в зависимости от избытка рыночного фонда заработной платы над минимально необходимым выражается следующим соотношением:

$$M(n) - M(n-1) = m[L^m(n) - L^s(n)]. \qquad (4)$$

Влияние изменения капитала на разность между обоими фондами заработной платы запишется в виде

$$L^m(n) - L^s(n) = e[K(n) - K(n-1)]. \qquad (5)$$

Из утверждения, что всякое увеличение массы капитала вызывает соответствующее возрастание рыночного фонда заработной платы, легко следует вывод, что минимально необходимый фонд заработной платы данного периода равен рыночному фонду заработной платы предыдущего периода [1]). Но вместе с тем отсюда вытекает, что продолжительность периода должна быть в точности равна периоду реакции народонаселения на это воздействие. За этот промежуток времени в результате роста численности населения, вызываемого биологическими причинами или улучшением условий жизни, рыночный фонд заработной платы становится равным минимально необходимому фонду заработной платы, т. е. население увеличивается до тех пор, пока наличной суммы заработной платы будет достаточно для обеспечения людей минимально необходимым для жизни.

Наконец, мы должны дополнить нашу модель уравнением, определяющим накопление. Это уравнение имеет вид

$$K(n) = K(n-1) + A(n), \qquad (6)$$

---

[1]) Поскольку

$$L^m(n) - L^s(n) = e[K(n) - K(n-1)],$$

а

$$L^m(n) - L^m(n-1) = e[K(n) - K(n-1)],$$

имеем

$$L^s(n) = L^m(n-1).$$

так как накопление есть не что иное, как изменение наличности капитала. Само накопление, по Рикардо, зависит от прибылей ([5], гл. XXI). При этом можно предположить, что, учитывая продолжительность периода ответной реакции численности населения, он имел в виду прибыли того же периода, т. е.

$$A(n) = gG(n). \qquad (7)$$

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений (ср. также фиг. 1):

$$G(n) = P(n) - L^s(n), \qquad (1)$$

$$L^s(n) = lM(n), \qquad (2)$$

$$P(n) = pM(n) + P_0, \qquad (3)$$

$$M(n) - M(n-1) = m[L^m(n) - L^s(n)], \qquad (4)$$

$$L^m(n) - L^s(n) = e[K(n) - K(n-1)], \qquad (5)$$

$$K(n) = K(n-1) + A(n), \qquad (6)$$

$$A(n) = gG(n). \qquad (7)$$

Решение этой системы относительно $M(n)$ дает

$$M(n) = \frac{1}{1 + meg(l-p)} M(n-1) + \frac{meg}{1 + meg(l-p)} P_0.$$

Частное решение этого неоднородного конечно-разностного уравнения легко получить, положив $M(n) = M(n-1) = z_0$. Оно равно

$$z_0 = \frac{1}{l-p} P_0.$$

Тогда для однородного уравнения, положив

$$r = \frac{1}{1 + meg(l-p)},$$

получаем

$$M(n) = rM(n-1) = r^2M(n-2) = r^3M(n-3),$$

так как справедливы соотношения

$$M(n-1) = rM(n-2),$$

$$M(n-2) = rM(n-3).$$

Отсюда получаем

$$M(n) = r^n M(n-n) = r^n M_0.$$

Очевидно, что r определяет процесс изменения величины M во времени при заданной входной величине $C_0 = M_0$. В зависимости от значения r мы имеем следующие случаи поведения системы переменных, определяемых указанным уравнением:

$0 < r < 1$ — монотонно-устойчивый процесс;

$r = 1$ — стационарный процесс;

$r > 1$ — монотонно-неустойчивый процесс;

$0 > r > -1$ — колебательно-устойчивый процесс;

$r < -1$ — колебательно-неустойчивый процесс.

Так как линеаризованная функция производства должна пересекать нелинейную функцию, должно выполняться неравенство $l > p$. В нашем случае это приводит к условию

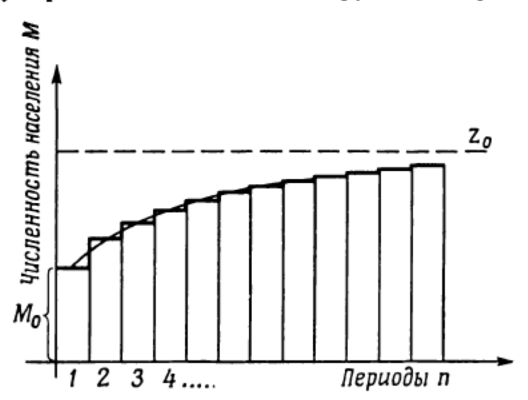
$$0 < r = \frac{1}{1 + meg(l-p)} < 1.$$

Без всяких пояснений видно, что при условии $l > p$ поведение системы всегда устойчиво, и притом монотонно-устойчиво, независимо от величины коэффициентов m, e и g, которые во всех случаях положительны. В силу принципа суперпозиции все переменные нашей системы уравнений одинаково изменяются во времени, т. е. каждая из них по мере возрастания коэффициента r монотонно стремится к своему равновесному значению.

На фиг. 2 показан рост народонаселения за различные периоды при $n \to \infty$. Поскольку минимально необходимый фонд заработной платы, конечный продукт и сумма капитала пропорциональны численности населения, эти величины обнаруживают такое же изменение во времени. Однако, если исходить из значения входной величины, лежащего ниже положения равновесия, сумма заработной платы растет быстрее конечного продукта. В любом случае равновесие характеризуется тем, что

конечный продукт равен минимально необходимой сумме заработной платы; другими словами, при достижении равновесия исчезают прибыли, а с ними и дальнейшее накопление.

Конечный продукт народного хозяйства не будет претерпевать изменений, пока остается неизменной техника производства. Если же благодаря техническому прогрессу произойдет изменение функции производства,



Фиг. 2. Рост народонаселения в классической динамике.

то опять возникнет процесс приближения к новому положению равновесия. Снова появятся прибыли, допускающие накопление, а с ними и временное превышение рыночного фонда заработной платы над минимально необходимым. Этот процесс будет до тех пор приводить к росту народонаселения, пока в состоянии равновесия конечный продукт снова не станет достаточным лишь для покрытия минимального фонда заработной платы, с помощью которого осуществляется воспроизводство населения.

Мы предполагали, что входная величина этой системы всегда лежит ниже уровня равновесия, что обусловливает постоянно понижающийся прирост населения, но неуклонный технический прогресс может изменить эту тенденцию. Однако колебания в развитии экономики

возникли бы лишь в том случае, если вследствие внешних чрезвычайных обстоятельств (вòйны, стихийные бедствия) само положение равновесия было бы подвержено непредвиденным изменениям.

3

В рассмотренной выше системе социально-экономической динамики накопление определялось прибылями за тот же период. Как видим, Рикардо не уделял внимания проблеме временнóй характеристики накопления. Более того, допущение запаздывающих реакций до известной степени вообще чуждо мышлению классической политэкономии. Несмотря на это, попытаемся включить анализ запаздывающей реакции предпринимательской деятельности в классическую модель. Но мы сделаем это преимущественно по методическим соображениям, так как именно в этой связи удается особенно наглядно показать различие между методами уравнений в конечных разностях и дифференциальных уравнений с запаздыванием.

В то время как при рассмотрении процессов регулирования в технике одной из основных проблем являются изменения времени запаздывания устройства и последствия этих изменений, в народнохозяйственных процессах времена запаздывания, как правило, заданы наперед. Их изменение в общем случае невозможно и вследствие этого методы математического анализа, которыми преимущественно пользуются экономисты, до сих пор в большинстве случаев не включали описания этих процессов.

Поэтому мы при анализе видоизмененной системы будем сначала предполагать, что время запаздывания заранее фиксировано и в точности равно периоду реакции численности народонаселения. Для математического выражения этого допущения снова можно воспользоваться конечно-разностными уравнениями. Покажем, что в этом случае только отношение коэффициентов оказывает решающее влияние на устойчивость или

неустойчивость системы. Приводимая для сравнения система дифференциальных уравнений, описывающая рассмотренные выше процессы, в этом случае покажет, каким образом величина времени запаздывания влияет на устойчивость системы.

1. Заменим в системе уравнений (1)—(7) последнее уравнение соотношением

$$A(n) = gG(n-1) \qquad (7)$$

и решим его относительно $M(n)$. Тогда для изменения численности народонаселения во времени получим уравнение

$$M(n) = [1 - meg(l-p)]\,M(n-1) + megP_0. \qquad (8)$$

Частное решение z_0 этого неоднородного конечно-разностного уравнения, определяющее положение равновесия, снова имеет вид

$$z_0 = \frac{1}{l-p}P_0.$$

Запаздывание накопления относительно прибылей, очевидно, не оказывает влияния на положение равновесия. Как показано выше, тип временно́й зависимости определяется только соотношением

$$r = 1 - meg(l-p).$$

Эта временная зависимость обладает следующими свойствами:

а) она монотонно-устойчива, если

$$0 < 1 - meg(l-p) \leqslant 1,$$

т. е. при условии

$$0 \leqslant meg(l-p) < 1,$$

или, иначе говоря, до тех пор, пока справедливо неравенство

$$meg \leqslant \frac{1}{l-p};$$

б) она колебательно-устойчива, если

$$-1 \leqslant 1 - meg(l - p) < 0,$$

т. е. когда

$$-2 \leqslant -meg(l - p),$$

или

$$meg \leqslant \frac{2}{l - p}.$$

Из этих условий видно, что область устойчивости все еще охватывает сравнительно большие значения величин, которые могут быть тем больше, чем меньше отклонение угла наклона функции производства от угла наклона функции минимального фонда заработной платы.

Простые рассуждения показывают, что это утверждение совместимо не только с представлениями классической политэкономии, но и с определением условий равновесия. Действительно, если величина $|l - p|$ становится очень мала, то величина meg велика и любое изменение вблизи положения равновесия вызывает лишь небольшую разность между приростом конечного продукта и минимально необходимым фондом заработной платы. Это в свою очередь обусловливает малые величины прибылей, накоплений и прироста населения.

В классической модели социально-экономической динамики мы можем, следовательно, считать, что и после включения временного запаздывания область устойчивости остается вероятной областью. Следует, однако, иметь в виду, что может появиться колебательная неустойчивость, так как нельзя безусловно утверждать, что не может возникнуть неравенство

$$1 - meg(l - p) < -1,$$

хотя и имеется много соображений, по которым этого не должно произойти. Впрочем, указанное неравенство будет иметь место лишь при условии, что

$$-meg(l - p) < -2,$$

т. е. если

$$meg > \frac{2}{l - p}.$$

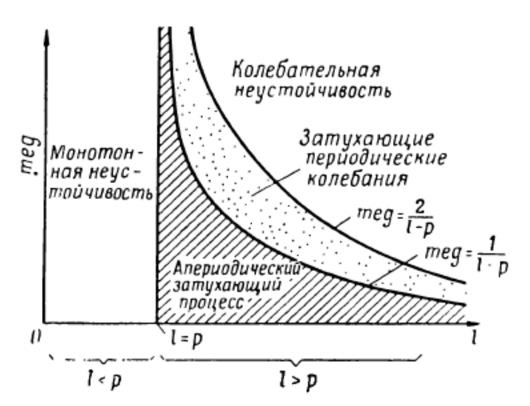
Вместе с тем в системе никогда не может возникнуть монотонная неустойчивость, так как это потребовало бы, чтобы выполнялось неравенство

$$1 - meg\,(l - p) > 1,$$

которое при положительных значениях m, e и g, очевидно, возможно лишь в том случае, когда

$$p > l.$$

Но это исключается законом производства Рикардо, который в отличие от допущения Адама Смита о постоянном приросте дохода предполагает уменьшающиеся предельные доходы.



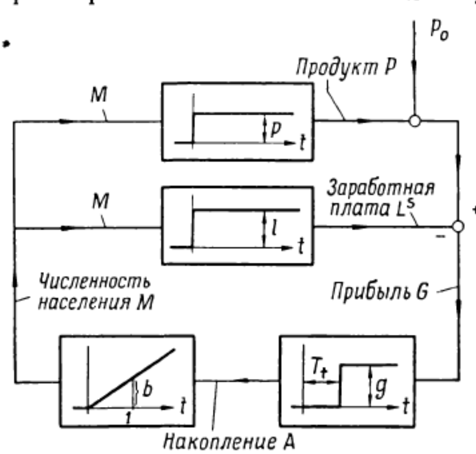
Фиг. 3. Области устойчивости системы уравнений (1) — (7).

Приводимая на фиг. 3 диаграмма областей устойчивости решения конечно-разностного уравнения иллюстрирует сказанное. Следует, в частности, обратить внимание на то, что чем меньше разность между l и p, тем бóльшие значения meg охватывает область демпфирования.

2. Чтобы показать, что часто применяемый в технике аппарат дифференциальных (или смешанных разностно-дифференциальных) уравнений может быть использован и при анализе народнохозяйственных проб-

лем, представим прежде всего систему классической динамики в виде схемы потоков информации (фиг. 4).

При отсутствии запаздывания изображенная на схеме цепь регулирования соответствовала бы всегда устойчивой системе. Однако при включении в рассмотрение времени запаздывания оказывается, что при некоторых значениях параметров система становится неустойчивой.



Фиг. 4. Система классической динамики как цепь регулирования.

Нетрудно получить систему уравнений, описывающую эту схему.

Как и ранее, зададим прибыли уравнением

$$G(t) = P(t) - L^s(t). \tag{9}$$

Функция производства имеет вид

$$P(t) = pM(t) + P_0. \tag{10}$$

Минимальный фонд заработной платы зависит от наличного рабочего населения

$$L^s(t) = lM(t), \tag{11}$$

численность которого [после упрощения в результате подстановки уравнения (5) в уравнение (4)] в свою

очередь следующим образом зависит от величины наличного капитала:

$$M(t) = b\,K(t). \tag{12}$$

Изменение фонда капитала равно накоплению

$$\frac{dK}{dt} = A(t), \tag{13}$$

которое в свою очередь является функцией прибылей, опережающих его на время запаздывания T_t:

$$A(t) = gG(t - T_t). \tag{14}$$

Неоднородное уравнение для нашей системы после подстановки соответствующих величин и приведения подобных членов принимает вид

$$\dot{M}(t) = -bg(l - p)\,M(t - T_t) + bgP_0. \tag{15}$$

Частное решение этого уравнения приводит к тому же положению равновесия, которое получается при представлении системы с помощью уравнений в конечных разностях. Легко найти [1]), что условие устойчивости имеет вид

$$\frac{2}{\pi}\,bg < \frac{1}{T_t} \cdot \frac{1}{l - p},$$

[1]) Как подробнее разъясняется на стр. 73, установившееся синусоидальное колебание $M(t) = e^{-j\omega t}$, где $j = \sqrt{-1}$, при подстановке в уравнение (15) и отбрасывании неоднородной части, дает для границы устойчивости условие

$$-j\omega e^{-j\omega t} = -Ke^{-j\omega(t - T_t)},$$

где $K = bg(l - p)$. Это равносильно условию

$$j\omega = Ke^{j\omega T_t}.$$

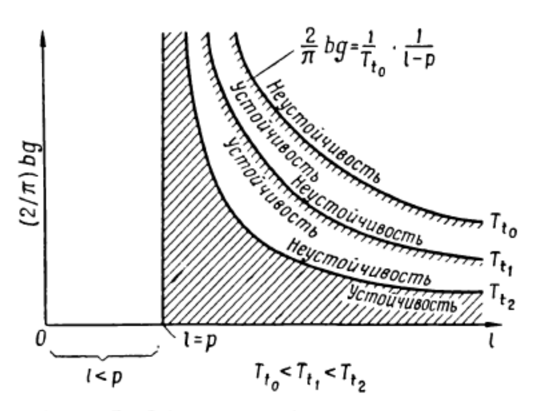
Сравнение мнимых частей дает

$$\omega T_t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

а действительных частей

$$K = \omega,$$

откуда мы без труда получаем, что при увеличении времени запаздывания неустойчивость системы возрастает. Эта зависимость показана на фиг. 5, где штриховкой каждый раз указана область устойчивости. При этом



Фиг. 5. Области устойчивости системы, показанной на фиг. 4.

сразу обнаруживается преимущество применения этого метода, так как он позволяет при исследовании условия устойчивости в явном виде определить влияние времени запаздывания.

4

Хотя уже сравнительно давно было выяснено, что народнохозяйственные процессы являются процессами взаимозависимыми, экономисты большей частью ограничивались словесными высказываниями о народнохозяй-

---

откуда следует, что

$$K = \frac{1}{T_t}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

Для случая $n = 0$ получается условие устойчивости

$$K = \frac{\pi}{2T_t} = bg\ (l - p).$$

ственных системах, никак не учитывающими границы их устойчивости. Это становится понятным, если вспомнить, что до самого недавнего времени математическое описание экономических соотношений при помощи системы уравнений считалось несоответствующим поставленной задаче. Дискуссия по этому вопросу ни в коей мере еще не закончена и пределы применимости математики достоверно еще не установлены. Однако предыдущее изложение, как мы надеемся, показало, что описание экономических процессов математическими методами не обязательно должно смазывать результаты словесной аргументации.

Уже наше краткое изложение классической модели социально-экономической динамики позволило выявить неоднократно подчеркиваемую Рикардо тенденцию системы к стационарному равновесному изменению и установить возникающие при этом реакции. Если бы указанные гипотезы обладали той высокой степенью вероятности, которая приписывалась им классиками политической экономии, то вытекающие отсюда выводы для экономической политики носили бы безусловный характер. Действительно, тогда в нашей экономической системе ни при каких условиях не могли бы возникнуть колебания или, во всяком случае, возникали бы лишь быстро затухающие колебания. Но в этом случае система, очевидно, автоматически регулируется таким образом, что не требуется вмешательства извне. Напротив, какие бы то ни было вмешательства приводили бы лишь к нарушениям протекания процессов во времени, так как они постоянно меняли бы положение равновесия. Таким образом, для экономической политики как бы сам собой напрашивается вывод, что следует по возможности воздерживаться от любого вмешательства в экономический процесс.

Рикардо, а вслед за ним и большинство политэкономов отрицали прежде всего возможность внутренне присущих системе колебаний, допуская в лучшем случае частные кризисные явления. Поскольку, однако, экономические колебания повторялись с бросающейся в глаза регулярностью, все более выдвигался на первый план

вопрос об их причинах. Около того же времени исследование народнохозяйственных процессов разделилось на два направления, сравнительно обособленных друг от друга, причем каждое из них по содержанию, безусловно, восходило к системе идей Рикардо. Представители первого направления полагали, что процессы макроэкономики необходимо описывать как систему микроэкономических меновых отношений, так как совокупность всех возможных случаев может быть охвачена лишь детальным анализом. Наиболее полное выражение эта идея нашла, пожалуй, в статических системах равновесного обмена всех товаров в пределах национальной экономики, предложенных Вальрасом и Парето. Другое направление сосредоточило свое внимание на исследовании внешних факторов, приводящих к кризисным нарушениям экономики.

Лишь к середине прошлого столетия вновь возродилась концепция, выдвигавшаяся еще до и во времена Рикардо, согласно которой системе внутренне присущи колебания. При этом система Маркса [8] является единственной системой, следующей великим традициям классической политэкономии и одновременно являющейся их антиподом, которая пытается вывести законы движения не только экономических процессов, но и общественных отношений людей. Мы не имеем возможности подробнее остановиться здесь и на этой системе социально-экономической динамики. Отметим лишь, что Маркс приписывал динамике процесса производства неограниченную неустойчивость, которая сообразно с историко-материалистической диалектикой взаимоотношений между уровнем развития производительных сил и производственными отношениями должна привести к радикальному перевороту в общественных отношениях. Диалектика — как в гегелевском понимании, так и в том смысле, который придавали этому слову Маркс и Энгельс (см. в этой связи также работы Тастина [3, 4]), — является лишь более ранним выражением понятия взаимной зависимости величин.

После того как Жюглар на статистическом материале доказал регулярный характер колебаний в экономике,

все больше стало появляться различных, более или менее разработанных систем для объяснения этого явления. Все они, однако, с тех пор ограничивались попыткой объяснить динамику только экономических процессов. Общественные отношения, как правило, явно не вводятся в анализ. Уже одна попытка классификации этих теорий увела бы нас далеко за рамки настоящего изложения. Для всех этих теорий характерно, что они особо выделяли то одно, то другое явление, наблюдаемое в конъюнктурном развитии, и рассматривали весь ход движения экономики как результат влияния одного этого фактора. Тем не менее таким путем с течением времени удалось создать довольно наглядную картину развития экономической конъюнктуры и выявить множество существенных для нее моментов.

Однако, несмотря на эти весьма многочисленные исследования конъюнктурных явлений, к началу чрезвычайно бурного мирового экономического кризиса, разразившегося в конце 20-х годов нашего столетия, отсутствовала надежная система принципов, которую можно было бы положить в основу описания динамики экономических процессов.

Еще меньше были мы осведомлены в отношении средств и мер стабилизации экономики, так что в годы депрессии приходилось более или менее беспомощно ожидать естественного развития событий. К тому же некоторые либеральные идеи отрицали необходимость вмешательства в экономический процесс, а другие политически влиятельные группы не желали вмешательства, с уверенностью рассчитывая на такое социальное развитие, которое поставило бы под серьезную угрозу дальнейшее существование всего экономического и социального, а часто вместе с ним и государственного и политического строя.

И действительно, в ряде случаев произошли изменения в государственно-политической сфере, которые до сих пор накладывают свой отпечаток на всемирно-политические события, а возможно, и определяют их.

Как бы то ни было, все же опыт этого чрезвычайно бурного конъюнктурного спада дал по сей день ощути-

мый импульс для анализа экономической динамики. Ученые-экономисты все больше стали сосредоточивать внимание на циклических колебаниях хозяйственной деятельности, и все более настоятельно стал выдвигаться вопрос о средствах стабилизации экономического развития. Благодаря неустанным усилиям ученых были выработаны принципы экономической политики, применение которых должно если не совершенно исключить, то, во всяком случае, сделать менее вероятным повторение столь резких экономических спадов. Но разрыв между «исключить» и «сделать менее вероятным» все еще достаточно велик. И это оправдывает продолжающиеся серьезные усилия по разработке надежной теории экономической динамики. Основные положения и выводы этих исследований кратко описаны в дальнейшей части нашего изложения.

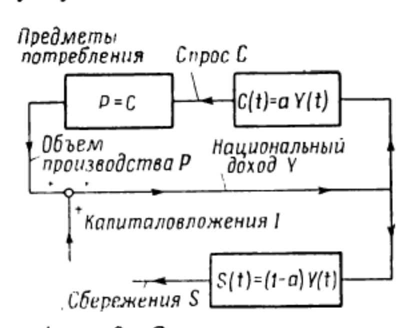
3. ОСНОВЫ СОВРЕМЕННЫХ ОБЪЯСНЕНИЙ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

1

На современные воззрения весьма существенное влияние оказали исследования Кейнса, книга которого «Общая теория занятости, процента и денег» [9], если и не привела к решению проблем, то все же дала легко понятную систему взаимозависимых народнохозяйственных величин. Поэтому нам кажется целесообразным изложить прежде всего некоторые основные идеи Кейнса. Конечно, основы современной теории экономической динамики заложены не одним Кейнсом (см. [10]), хотя его система обладает тем, возможно несколько сомнительным, преимуществом, что ее можно изложить просто, не изменяя при этом существенно ее основных выводов.

Прежде всего мы должны учесть, что система Кейнса, подобно системам классической политической экономии и в противоположность неоклассическим учениям, имеет дело с небольшим числом народнохозяйственных показателей. При выборе показателей Кейнс следовал

современным ему идеям, которые приобрели особое значение благодаря разработке им теории эффективного спроса. Согласно этому принципу, национальный доход[1]), объем производства и занятость определяются не (или, точнее, не только) наличными факторами производства, а в первую очередь спросом на услуги этих факторов. Выплаты этим факторам производства за оба вида народнохозяйственных услуг — производство товаров и услуги в области капиталовложений и (или) потребления — образуют чистый конечный продукт по факториальным ценам, т. е. совокупность всех доходов народного хозяйства за один период (национальный доход). *Капиталовложения* (инвестиции) включают все виды доходов, получающиеся не из производства потребительских товаров, так что на эту величину оказывают влияние и дефициты (или избытки) государственного бюджета, внешней торговли и складских запасов.



Фиг. 6. Структурная схема системы Кейнса.

Совместное действие этих величин приводит к возникновению цепи взаимных связей, которая воспроизведена в виде схемы потоков информации на фиг. 6. Затраты на выплату доходов в сфере производства предметов потребления, которые мы обозначаем символом P, и расходы на капиталовложения, обозначаемые символом I, в сумме дают национальный доход Y. Некоторая часть его (aY) представляет собой спрос на предметы потребления C. Следуя Кейнсу, под сбережениями S будем понимать превышение национального дохода над расходами на потребление («издержками использования»), так что эта величина равна $(1 - a)\,Y$.

---

[1]) Здесь и далее всюду, где автор говорит о национальном доходе, подразумевается конечный продукт. — *Прим. ред.*

В качестве первого приближения к системе взаимных связей в сфере потребления мы можем приравнять спрос на предметы потребления объему их производства. Хотя мы и не можем ожидать, что при любых уровнях дохода существует постоянное отношение между расходами на потребление и национальным доходом, все же будем предполагать, что потребление и национальный доход связаны линейной зависимостью, причем наклон этой прямой должен быть такой, чтобы тангенс угла наклона был равен a.

Теперь мы можем определить характер зависимостей в сфере потребления системы Кейнса. Очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$Y(t) = P(t) + I(t), \tag{16}$$

$$C(t) = aY(t), \tag{17}$$

$$P(t) = C(t), \tag{18}$$

так что

$$P(t) = aY(t),$$

откуда получаем

$$Y(t) = aY(t) + I(t),$$

или в явном виде

$$Y(t) = \frac{1}{1-a} I(t). \tag{19}$$

Выражение $1/(1-a) = m$ есть не что иное, как «мультипликатор» Кейнса. В точном смысле слова он является «мгновенным мультипликатором» (instantaneous multiplier), так как определяет умножающее воздействие капиталовложений на национальный доход без временного запаздывания. Если эта цепь регулирования действительно осуществляется в национальной экономике, то сразу оказывается неизбежным равенство сбережений и капиталовложений. В самом деле для сбережений справедливо соотношение

$$S(t) = (1-a)\, Y(t). \tag{20}$$

Тогда из уравнения для мультипликатора следует, что

$$I(t) = (1 - a)\, Y(t), \tag{21}$$

так что

$$I(t) = S(t). \tag{22}$$

Поскольку в этой цепи регулирования не возникает запаздывания, сбережения будут даже непосредственно равны капиталовложениям.

Из изложенного ясно, что мультипликатор Кейнса описывает простой случай цепи регулирования с положительной обратной связью. Многие цепи регулирования в технике построены аналогичным образом, однако в отличие от экономических цепей регулирования они имеют отрицательную обратную связь. Специалисту по регулированию отсюда сразу становится ясно, что при таком условии народнохозяйственные цепи регулирования часто могут становиться неустойчивыми.

2

Допущение о том, что в народнохозяйственный процесс в качестве цепи регулирования входит лишь сфера потребления [1]), позволило сделать ряд весьма существенных выводов для экономической политики. Положенная при этом в основу схема взаимных связей предполагает, что уровень национального дохода определяется мультипликатором как некоторое кратное суммы капиталовложений, причем последняя является независимо определяемой величиной. Размер национального дохода, однако, является лишь другим выражением для объема производства, который определяет уровень занятости в народном хозяйстве. Как правило, численность населения, занятого в народном хозяйстве, соответствует

[1] В теории Кейнса сфера капиталовложений также является цепью регулирования, которая, однако, содержит независимо определяемые управляющие величины для регулирующей величины I, так, что мы, упрощая, можем сразу рассматривать их в качестве задающих воздействий.

величине национального дохода и определяется последней. Коль скоро капиталовложения определяют национальный доход, они определяют также и уровень занятости; если капиталовложения недостаточно велики, возникает безработица, если же они слишком велики, то возникают нехватка рабочей силы, рост заработной платы и повышение цен.

На уровень капиталовложений оказывают влияние также и дефициты или избытки государственного бюджета, внешней торговли и т. п., которые в известных пределах могут изменяться произвольно. Вследствие этого путем ограничения степени свободы этой системы можно управлять как национальным доходом, так и уровнем занятости населения. Другими словами, теория Кейнса предполагает, что национальный доход и занятость (причем последняя в нашей системе в явном виде не фигурирует) можно рассматривать как регулируемые величины, а капиталовложения играют роль управляющих воздействий.

Почти все разработанные за последние годы рекомендации для стабилизации уровня занятости покоятся на этих соображениях. Их с успехом можно использовать лишь постольку и до тех пор, пока капиталовложения представляют собой независимо определяемые параметры народнохозяйственного процесса. При этих условиях дефекты системы рыночного хозяйства можно преодолеть без значительных трудностей и без коренных преобразований общества, основанного на системе свободного обмена.

В действительности мы, однако, должны признать, что капиталовложения в народное хозяйство не являются независимо определяемой величиной или, точнее, что их можно устанавливать произвольно лишь в очень ограниченных пределах. Дело в том, что для получения определенного объема продукции спрос на продукт производства является лишь необходимым, но отнюдь не всегда достаточным условием. Лишь в том случае, когда имеются налицо необходимые производственные мощности, иначе говоря, необходимые для определенного

объема продукции массы долгоживущих средств производства [1]), эффективный спрос, по-видимому, может обеспечить соответствующий объем производства. Следовательно, только учет обоих факторов — спроса на продукты производства и наличных производственных мощностей — дает необходимое и достаточное условие для анализа соотношений между спросом и предложением. Сфера потребления в системе Кейнса игнорирует второе условие и поэтому лишь неполно и несовершенно описывает народнохозяйственный процесс производства.

Чрезвычайно широкая дискуссия, развернувшаяся после появления «Общей теории» Кейнса и продолжавшаяся в течение 20 лет, вскрыла наряду с указанными выше также ряд других недостатков и слабостей теории Кейнса. Однако никакие критические доводы не в состоянии умалить роли Кейнса для современных экономических исследований. Освободившись от односторонностей неоклассического мышления, он решающим образом содействовал выяснению народнохозяйственных проблем тридцатых годов и одновременно оказал плодотворное влияние на исследование экономических процессов в целом.

3

Из предпосылки о пропорциональности между объемом производства и наличностью средств производства с необходимостью следует, что изменение выпуска продукции в результате меняющегося спроса влечет за собой пропорциональное изменение наличности средств производства. Но значительные части капиталовложений в народное хозяйство представляют не что иное, как изменение суммы таких произведенных средств производства, как парк машин, складские запасы и т. д. Поэтому капиталовложения пропорциональны именно в этом объеме изменению спроса на продукцию. Изменения ка-

---

[1]) Именно в этом смысле в дальнейшем и употребляется термин «наличность произведенных средств производства» (Bestand an produzierten Produktionsmitteln). Он соответствует понятию «основные фонды». — *Прим. ред.*

питаловложений, следовательно, зависят от ускорения эффективного спроса.

Таково в чрезвычайно упрощенном изложении содержание теоремы, известной в политической экономии уже около 40 лет (см. [11], а также [12]) и носящей название принципа акселерации, или принципа ускорения. За последние годы состоялось широкое обсуждение роли и количественного выражения этого принципа. Можно с уверенностью сказать, что гипотеза о неограниченной сфере действия принципа акселерации является лишь первым приближением к решению проблем взаимной связи между национальным доходом, потреблением и капиталовложениями. При построении модели цепи регулирования национальной экономики мы, однако, вынуждены во всех случаях соответствующим образом учитывать эту гипотезу, касающуюся взаимозависимости экономических величин.

Хотя имеется много других альтернативных допущений [1]) и взаимосвязи в народном хозяйстве не исчерпываются одной этой теоремой, мы в качестве следующего приближения предположим, что народнохозяйственный процесс определяется цепью «национальный доход — потребление», дополненной цепью капиталовложений.

При этом схема потоков информации между макроэкономическими переменными изменится. Капиталовложения, как и ранее, рассматриваются независимо от сбережений. Но теперь они уже связаны с национальным доходом зависимостью, которая будет детально рассмотрена ниже. На этой основе Самуэлсон, Бомоль и Хикс создали модели динамики народного хозяйства (см. [13, 14]) и проанализировали их с помощью уравнений в конечных разностях. Использовав конечно-разностные уравнения второго и частично третьего порядка, они смогли показать, что цепь капиталовложений приводит к колебательной системе, которая при увеличении коэффициента ускорения («акселератора») и росте «предель-

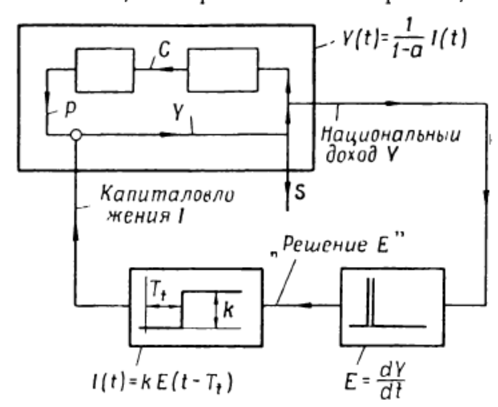
---

[1]) Систематическое изложение их дано в статье Фёля, см. стр. 83 настоящего сборника.

ной склонности к потреблению» приобретала колебательно-неустойчивый характер.

Мы не будем анализировать при помощи аппарата разностных уравнений выводы, которые можно получить из этих моделей, а сначала дополним соответствующим образом нашу схему потоков информации, чтобы затем, по аналогии с изложением Тастина, обсудить ее в инженерных терминах.

В отличие от цепи регулирования народного хозяйства Кейнса схема, изображенная на фиг. 7, показывает,



Фиг. 7. Система Кейнса, дополненная цепью регулирования капиталовложений.

что капиталовложения (I) уже не являются управляющим параметром, а играют роль регулирующего воздействия для национального дохода (Y), выступающего в роли регулируемой величины. Фактические капиталовложения следуют за решением вложить капитал (E) с запаздыванием T_t. Решения (E) в свою очередь определяются изменениями национального дохода (Y). Сразу очевидно, что и цепь капиталовложений представляет собой систему с положительной обратной связью. Тенденция системы при определенных условиях становиться колебательно-неустойчивой видна уже из предыдущего изложения, так как основной динамический процесс, охватывающий взаимосвязи между национальным дохо-

дом, потреблением и капиталовложениями, определяется двойной положительной обратной связью.

Цепь потребления определяла национальный доход (Y) как величину, пропорциональную сумме капиталовложений (I):

$$Y(t) = mI(t), \tag{23}$$

где

$$m = \frac{1}{1-a}$$

представляет собой введенный выше мультипликатор Кейнса. Чтобы дополнить нашу схему этой цепи регулирования системой регулирования, связанной с капиталовложениями, в цепь между капиталовложениями и национальным доходом были включены два звена регулирования, ибо оказалось целесообразным отделить решения вложить капитал от фактических затрат на капиталовложения. Это без труда можно осуществить в схеме. Решения вложить капитал, как было указано выше, являются решениями изменить наличность произведенных средств производства; поскольку эта величина считается в каждый данный момент пропорциональной эффективному спросу и тем самым национальному доходу, изменение национального дохода Y вызывает необходимость изменения в народном хозяйстве наличности произведенных средств производства. Иными словами, изменения национального дохода вызывают решения о вложении капитала E. Отсюда следует, что

$$E(t) = \frac{dY}{dt}. \tag{24}$$

Поскольку общая наличность средств производства в стране находится в определенном количественном соотношении с национальным доходом, то и фактическое изменение наличных средств производства, т. е. объем капиталовложений, должно соответствовать этому соотношению. Решения произвести капиталовложения при учете именно этого соотношения реализуются в виде

затрат на капиталовложения. Эта зависимость обычно называется акселератором k[1]) и определяется отношением

$$\frac{\text{Наличность произведенных средств производства}}{\text{Выпуск продукции (или национальный доход)}}.$$

Как макроэкономическая константа она представляет собой усредненную реакцию, а не технически заданную величину.

Однако прежде чем установить алгебраическое выражение для этого соотношения, мы должны учесть, что человеческие действия требуют определенного времени. Реализация капиталовложений (I) следует за решениями вложить капитал (E) с некоторым запаздыванием во времени. Это «время запаздывания» хотя и не определено однозначно, но фактически задается большим числом факторов. Прежде всего стремление к прибыли способствует сокращению этого времени, ибо только приспосабливая соответствующим образом производственные мощности, можно не упустить возможности удовлетворить спрос. Если наличные резервы производственных мощностей невелики, то это вынуждает предпринимателя сравнительно быстро расширять мощность своих предприятий.

Скорость реализации капиталовложений, однако, существенным образом зависит и от эластичности предложения услуг факторами производства. Только эластичность предложения может заставить факторы производства реагировать в достаточном объеме и с коротким запаздыванием. Негибкое, жесткое предложение удлиняет время запаздывания; аналогичное действие оказывают соображения риска, так как капиталовложения, как правило, необратимы, по крайней мере за короткий отрезок времени.

Эти соображения здесь прежде всего служат для обоснования понятия времени запаздывания. Одновременно

---

[1]) Акселератор здесь определяется как коэффициент ускорения на единицу времени, а не как ускорение в единицу времени, умноженное на число единиц времени за период, что имеет место в конечно-разностных уравнениях. Поэтому в случае конечно-разностных уравнений можно учесть изменение времени запаздывания путем соответствующего изменения величины акселератора.

они показывают, с какими трудностями связано построение сложных моделей. На первых порах мы для удобства применения математического аппарата удовлетворимся введением в нашу модель постоянного времени запаздывания T_t. Звено в цепи регулирования, соответствующее реализации капиталовложений, определяется тогда следующим уравнением:

$$I(t) = kE(t - T_t). \tag{25}$$

Тем самым определяется цепь капиталовложений, поскольку все рассматриваемые величины представлены в их взаимозависимости.

Итак, наша система уравнений имеет вид:

$$Y(t) = \frac{1}{1-a} I(t), \tag{23}$$

$$I(t) = kE(t - T_t), \tag{25}$$

$$E(t) = \frac{dY}{dt}. \tag{24}$$

Подстановка уравнения (24) в (25) и (23) позволяет свести эти три уравнения к одному, в результате чего получаем уравнение для переходной функции всей цепи регулирования:

$$Y(t) = \frac{k}{1-a} \dot{Y}(t - T_t). \tag{26}$$

Структурная связь, определяемая схемой и описывающими систему уравнениями, позволяет провести упрощенное рассмотрение модели. А именно, из уравнений (23) и (25) получаем

$$Y(t) = \frac{k}{1-a} E(t - T_t).$$

Обозначив

$$\frac{k}{1-a} = g,$$

можем представить нашу упрощенную зависимость уравнениями

$$Y(t) = gE(t - T_t) \tag{27}$$

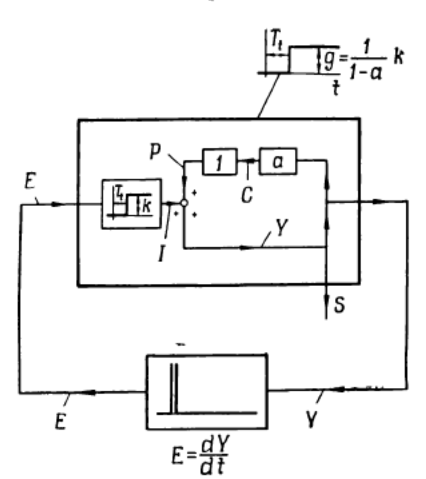
и

$$E(t) = \dot{Y}(t). \tag{28}$$

Уравнение переходной функции в соответствии с уравнением (26) имеет вид

$$Y(t) = g\dot{Y}(t - T_t). \tag{29}$$

Рассмотрение представленной таким образом цепи регулирования с «акселератором» и «мультипликатором» можно найти и у Тастина [3], на рассуждения которого мы здесь опирались. Схема общей цепи регулирования (фиг. 8) показывает, что основной народнохозяйственный процесс можно представить как цепь регулирования, в которой имеется положительная обратная связь между усилительным звеном с запаздыванием и дифференцирующим звеном. В следующем разделе доказывается, что этот процесс, как правило, становится колебательно-неустойчивым.



Фиг. 8. Упрощенная система по Тастину.

4

По аналогии с методами, применяемыми для анализа поведения цепей регулирования в технике[1]), мы можем и для этой простейшей системы, описывающей основной процесс динамики народного хозяйства, найти условия устойчивости. Примем, что величина $Y(t)$ изменяется по синусоидальному закону, и зададим себе вопрос, с какой амплитудой это синусоидальное колебание после обегания замкнутой цепи возвращается в исходную точку («вход») системы. Для ответа на этот вопрос

[1]) Подробнее об этом см. в статье В. Оппельта (стр. 18), которому автор здесь выражает признательность за ценную помощь при обсуждении вопросов устойчивости и при переводе народнохозяйственных идей на язык инженера.

придется построить амплитудно-фазовую характеристику цепи регулирования.

Изобразим амплитуду принятого нами входного колебания

$$Y(t) = y_e \sin \omega t$$

в плоскости комплексного переменного вектором

$$y_e(1+0j) = y_e.$$

Переходная функция для E представляет собой первую производную по времени от входной величины Y. Поэтому колебание величины E дается уравнением

$$E(t) = E_0 \cos \omega t,$$

где $E_0 = \omega y_e$. В нашей записи вектор этого колебания представится величиной

$$y_e j\omega(1+0j) = y_e j\omega = E_0.$$

Величина этого вектора при различных значениях ω отложена по мнимой оси. Длина этого вектора равна ω и он повернут на 90° в положительном направлении относительно вектора y_e.

Возникающее при осуществлении капиталовложений запаздывание T_t приводит к тому, что колебание связанных звеньев, т. е. колебание выходной величины, дается уравнением

$$y_a = gE_0 \cos \omega (t - T_t),$$

так что соответствующий вектор запаздывает относительно $E(t)$ на время T_t. Его длина задается величиной g. Если теперь определять длину и положение векторов для различных значений ω, то получается амплитудно-фазовая характеристика всей цепи регулирования. Эта кривая показана на фиг. 9 сплошной линией. Поскольку

$$g = k \frac{1}{1-a},$$

мы без труда можем охарактеризовать влияние цепи капиталовложений и расходов на потребление, откладывая вдоль векторов y_a длину, соответствующую цепи капи-

таловложений. При этом мы получим вторую кривую, изображенную на фиг. 9 пунктиром. Расстояния между

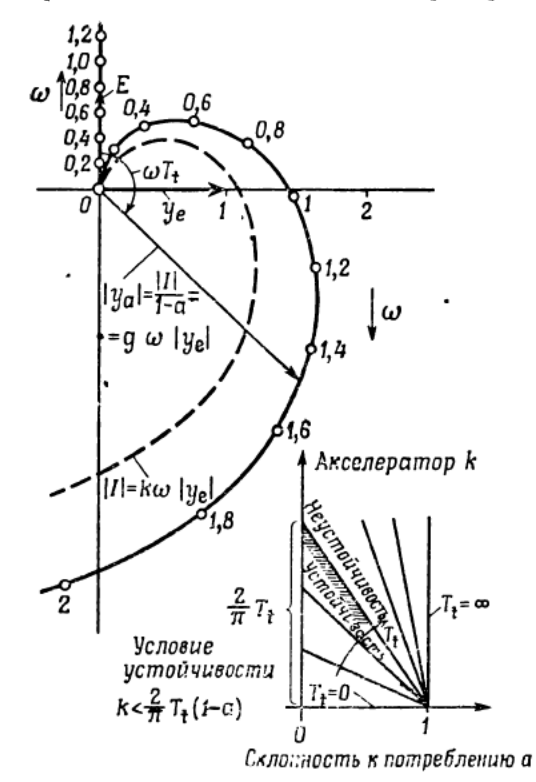
$$0 \quad \text{и} \quad |I| = ky_e\omega$$

характеризуют влияние капиталовложений, а участки между

$$|I| \quad \text{и} \quad Y = gy_e\omega$$

соответствуют потреблению.

Отсюда легко понять, каким образом изменения мультипликатора или соответственно акселератора влияют на



Фиг. 9. Амплитудно-фазовые характеристики и области устойчивости цепи регулирования, изображенной на фиг. 8.

устойчивость системы. Система будет устойчивой только в том случае, если кривая для y_a между 0 и точкой y_e пересекает действительную ось, ибо тогда воздействие цепи регулирования не увеличивает амплитуду колебаний. Очевидно, что совместное действие мультипликатора и акселератора может при достаточно больших их значениях сделать систему неустойчивой. И хотя значительное уменьшение их величины могло бы стабилизировать систему, но в силу того, что наклон кривой потребления a и акселератор k представляют собой сравнительно большие и заранее заданные величины, система все же будет неустойчивой.

Представленная на фиг. 9 амплитудно-фазовая характеристика построена при следующих значениях параметров: время запаздывания $T_t \approx 1{,}5$; акселератор $k \approx 1{,}05$ и мультипликатор $m \approx 1{,}4$, что соответствует предельной склонности к потреблению ($a \approx 0{,}3$). Если принять, что период колебаний T равен 6 годам, то получим $T_t = T/4 = 1{,}5$ года.

Столь нереальные соотношения величин не обязательно должны появляться в более усовершенствованных моделях. Наша модель получилась мало реалистичной в силу двух гипотез, которые мы приняли в целях упрощения, а именно, что потребление не имеет запаздывания и что все необходимые капиталовложения относятся к одному определенному моменту времени. Однако на качественные выводы о характере поведения системы это не оказывает существенного влияния. Основной экономический процесс может быть колебательно-неустойчивым. Аналитическое выражение для границы устойчивости получается из требования, чтобы амплитудно-фазовая характеристика цепи регулирования подчинялась условию

$$y_e g \omega j e^{-j\omega T_t} = y_e (1 + 0j).$$

Поскольку $g > 0$, этому условию, по Тастину, удовлетворяет величина

$$\omega T_t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где n равно любому целому числу. Это уравнение наглядно показывает, что на границе устойчивости (на которой возникают установившиеся колебания) опережение по фазе, равное $\pi/2$, которое задается дифференцированием уравнения (28), как раз компенсируется отставанием по фазе на время запаздывания по уравнению (27).

Рассмотрим полученное нами уравнение для случая $n=0$, т. е. для такого значения g, которому соответствует самая низкая собственная частота системы. Тогда

$$\omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{T_t}.$$

Но так как при этом имеем также

$$y_e g \omega j e^{-j\omega T_t} = y_e g \omega j e^{-j(\pi/2)},$$

то из равенства длин векторов получаем

$$y_e g \omega = y_e$$

и

$$g\omega = 1.$$

В результате

$$g\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{T_t} = 1.$$

Поскольку $g = k/(1-a)$, мы вправе написать для границы устойчивости также уравнение

$$k = \frac{2}{\pi}\,T_t(1-a).$$

При этом условии в системе будут поддерживаться незатухающие колебания. Если

$$k < \frac{2}{\pi}\,T_t(1-a),$$

имеем затухающие колебания, а при условии

$$k > \frac{2}{\pi}\,T_t(1-a)$$

расходящиеся колебания.

Чтобы получить в системе затухающие колебания при заданных $a \approx 0{,}3$ и $T_t = 1{,}5$, акселератор должен был бы иметь значение $k \approx 0{,}7$.

Условие устойчивости поясняется диаграммой устойчивости, также изображенной на фиг. 9. Из этой диаграммы видно, что при заданном времени запаздывания и заданном k увеличение a понижает устойчивость, а при заданном времени запаздывания и заданном a увеличение k понижает устойчивость, в то время как при заданных значениях a и k устойчивость может быть повышена путем увеличения времени запаздывания T_t.

Следует указать, что изложенные выше выводы относительно устойчивости системы сходны с теми, которые получаются из рассмотрения упомянутых выше моделей, основанных на уравнениях в конечных разностях, особенно той из них, которая соответствует элементарной модели Хикса. Разница в соотношении величин, входящих в условия устойчивости, объясняется различием в основных уравнениях, описывающих реакцию системы. В частности, предположения о конечном времени запаздывания и о концентрации капиталовложений в определенный момент времени приводят к другим значениям периода колебаний и степени неустойчивости системы.

Однако, отвлекаясь от этих различий, в общем относительно системы, в которой совместно действуют акселератор и мультипликатор, принимают, что численные значения отдельных коэффициентов в реальных условиях таковы, что амплитудно-фазовая характеристика модели вся расположена вне точки (1, 0).

То обстоятельство, что при увеличении времени запаздывания устойчивость системы возрастает, очень просто объясняется тем, что при заданных коэффициентах более быстрая реакция системы, т. е. наличие меньшего времени запаздывания, приводит к более быстрому проявлению дестабилизирующих воздействий. Другими словами, мы должны представить себе, что при малом времени запаздывания система очень быстро полностью реагирует на данное изменение параметров. Эта реакция в свою очередь влечет за собой новые изменения, на которые система также тотчас же отвечает. Если учесть

взаимозависимость величин, то понятно, что при сокращении времени реакции система становится все более неустойчивой.

5

Такое представление о народнохозяйственном процессе ведет также к определенным выводам в экономической политике. Если, как сейчас общепринято, считать необходимым предотвращение колебаний экономики, то возникает гораздо более трудно разрешимая задача, чем в случае, если бы народнохозяйственные процессы достаточно точно описывались системой взаимных связей, подобной системе Кейнса. Для таких народнохозяйственных структурных схем, содержащих как дифференцирующие, так и пропорциональные и интегрирующие звенья в цепи регулирования, нужно разработать стабилизаторы особого рода [1]).

Конечно, описанная выше модель настолько мало отвечает реальным условиям, что из нее нельзя сделать каких-нибудь прямых выводов, касающихся национальной экономики данной конкретной страны. Полученные результаты имеют важное значение только в теоретическом отношении, ибо они показывают, что процесс регулирования, по всей видимости, является колебательно-неустойчивым.

Это утверждение в двух отношениях коренным образом отличается от более ранних выводов относительно колебательно-неустойчивых систем. Последние касались общественно-экономических связей, т. е. относились к сфере социально-экономической динамики. Новые модели относятся лишь к экономической динамике, и их положения могут претендовать на справедливость лишь в определенных пределах; иными словами, верхняя и нижняя границы системы предохраняют ее от полного саморазрушения. На этих границах зависимости становятся

---

[1]) Возможность оказать влияние на ход экономического развития путем изменения скорости реакции (сокращение или удлинение времени запаздывания T_t) в большинстве случаев если не вовсе исключена, то, как правило, весьма ограничена.

нелинейными и выводы о тенденциях протекания процессов теряют силу.

Рамки нашего изложения не позволяют заняться исследованием и этой области. Необходимо лишь добавить, что ввиду наличия чрезвычайно большого числа параметров системы, изменения которых определяют лишь долгосрочные тенденции, уровень равновесия непрерывно повышается. Вместе с уровнем равновесия растут и верхняя и нижняя границы, так что ход процесса характеризуется довольно равномерными колебаниями около среднего значения, которое само все время повышается.

4. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ МОДЕЛИ И ПРИНЦИПЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассмотренные нами модели ясно показывают необходимость построения гораздо более сложных систем. Укажем лишь несколько особенно важных проблем. Так, структура производства, подразумеваемая в наших моделях, слишком упрощена, чтобы можно было сделать надежные выводы. Наряду с этим в очень малой степени или вовсе не приняты во внимание компенсационные эффекты вследствие правительственного воздействия на положительные и отрицательные сальдо внешней торговли и государственного бюджета; в большинстве случаев то же следует с соответствующими оговорками сказать и о кредитном механизме системы. Столь же мало модели, включающие акселератор и мультипликатор, позволяют делать выводы и относительно реакций производителей и потребителей на изменения цен, сопровождающие каждый конъюнктурный цикл.

Хотя благодаря разъяснению Хикса и преодолены трудности, возникающие из-за того, что переменные даны в денежном выражении (в простых моделях мы, как правило, имеем дело лишь с денежным выражением величин, очищенным от колебаний покупательной способности), анализ таких величин все же невозможен без учета реакций производителей и потребителей экономического процесса на колебания покупательной способно-

сти. Эти несовершенства только что изложенных моделей поднимают множество проблем, разрешение которых должно быть облегчено рационально разработанным исследовательским аппаратом.

Тем не менее рассмотрение простых народнохозяйственных цепей регулирования при всем их несовершенстве все же смогло выявить некоторые характерные черты экономического процесса. Отрицание социально-экономической динамики и ее вывода о долговременной устойчивости привело к выяснению колебательного характера экономического процесса, который оказался неустойчивым в заданных пределах. Но за успех, достигнутый при объяснении экономических колебаний, пришлось заплатить утратой возможности ответить на вопрос о социальной динамике.

Однако применение аппарата теории регулирования открывает возможность рассмотрения с требуемой точностью гораздо более сложных моделей, быть может и таких, которые допускают эконометрическую проверку. Помимо этого, теория передачи информации в системах взаимной связи, возможно, позволит сформулировать теоремы относительно социальной динамики, отвечающие современному состоянию науки, и объединить их с соответствующими выводами, относящимися к области экономической динамики. Эмпирическая социология и многие, не поддававшиеся до сих пор теоретической трактовке эмпирические исследования в области политической экономии, финансов, а также общей и экономической политики смогут при таком обороте дел занять уже давно подобающее им место в объяснении социально-экономических явлений нашего времени.

Наконец, благодаря разработке систем взаимных связей произведен полный переворот в вопросе о принципах стабилизации хозяйственного развития. Тинберген еще в 1937 г. [15] пришел к выводу, что определение устойчивости всегда, хотя и, быть может, в неявном виде, покоится на определенных допущениях относительно динамики рассматриваемых систем. В то время он предложил, в полной аналогии с понятием устойчивости в технике, чтобы «равновесный процесс считался тем

более устойчивым, чем более демпфированы колебания около этого равновесного процесса». Идеальный случай не подверженной конъюнктурным колебаниям экономики тогда характеризовался бы высокой степенью устойчивости, т. е. «экономика после внешнего возмущения очень быстро возвращалась бы снова приблизительно в равновесное состояние».

Уже сейчас мы, однако, не можем полностью согласиться с этими утверждениями. Равновесное движение экономики, по-видимому, как правило, не совпадает с развитием полной занятости. Скорее мы, наоборот, должны предположить, что положение равновесия довольно существенно отличается от состояния полной занятости. Принимая предложенную Тинбергеном концепцию устойчивости, мы лишь устранили бы наиболее часто встречающиеся формы неудовлетворительной хозяйственной деятельности, но одновременно вынуждены были бы постоянно мириться с неполной занятостью. Только в том случае, если стабилизирующие мероприятия с сильным демпфированием обеспечивают повышение уровня равновесия почти до полной занятости, они будут отвечать современным требованиям стабилизации.

Для технических задач в большинстве случаев достаточно рассмотрения поведения системы вблизи границы устойчивости. Но в сложных экономических системах колебания переходного процесса становятся недопустимыми, если они превышают 5% общей хозяйственной деятельности. Народнохозяйственные системы должны поэтому совершать движения только вблизи границы апериодичности [16], а их положение равновесия должно быть расположено как можно ближе к границе полной занятости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wiener N., Mensch und Menschmaschine, Frankfurt/M und Berlin, 1952.
2. Regelungsvorgänge in der Biologie, München, 1956; русский перевод см.: «Процессы регулирования в биологии», Издательство иностранной литературы, 1960.

6 Зак. 2575

3. Tustin A., "Economic Regulation Through Control-System Engineering", *Impact of Science on Society,* 4, № 2, 83 (1953).
4. Tustin A., The Mechanism of Economic Systems, London, 1953.
5. Ricardo D., The Principles of Political Economy and Taxation, 1817; 1821 (London, 1949).
6. Lowe A., "The Classical Theory of Economic Growth", *Social Research,* 21, № 2, 127 (1954) (особенно разделы, посвященные А. Смиту и Д. Рикардо).
7. Baumol J., Turvey R., Economic Dynamics, New York, 1951.
8. Маркс К., Капитал, т. I, II и III, Москва, 1955.
9. Keynes J. M., The General Theory of Employment, Interest and Money, London, 1936; русский перевод см.: Кейнс Д. М., Общая теория занятости, процента и денег, Издательство иностранной литературы, 1948.
10. Föhl C., Geldschöpfung und Wirtschaftskreislauf, 1937.
11. Clarc J. M., Business Acceleration and the Law of Demand, *J. of Pol. Econ.* (1917).
12. Mieth W., Das Akzelerationsprinzip, Berlin, 1954.
13. Aujac H., "Les Modeles mathématique macrodynamiques et le cycle", *Economie applique,* 2, № 3—4, 46 (1949), особенно ч. I.
14. Schneider E., Einführung in die Wirtschaftstheorie, Teil III, Tübingen, 1953 (стр. 179 и след.; см. также приведенную библиографию).
15. Tinbergen J., "Einige Grundfragen der mathematischen Konjunkturtheorie", *Arch. f. mathem. Wirtsch.- und Soz.-Forschung,* Teil 2, 83 (1937).
16. Oppelt W., Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, 1954, S. 256; русский перевод см.: Оппельт В., Основы техники автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1960.

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ[1])

К. ФЁЛЬ

(Эбинген)

Под системой, или цепью регулирования, мы понимаем совокупность связанных величин, которые находятся в такой функциональной зависимости друг от друга, что изменение одной из этих величин влечет за собой изменения одной или нескольких последующих величин, которые в свою очередь прямо или косвенно вызывают изменения первой величины. Если это обратное воздействие, называемое *обратной связью*, возникает мгновенно, то при ступенчатом изменении одной величины все величины цепи регулирования мгновенно принимают соответствующие новые значения. Если же обратное воздействие возникает лишь через известный промежуток времени, называемый *временем запаздывания*, то у всех величин наступает переходный процессс приближения к новому установившемуся состоянию, которое апериодически или с затухающими периодическими колебаниями достигается через бесконечный промежуток времени или около которого различные величины совершают установившиеся (с постоянной амплитудой) или расходящиеся (с возрастающей амплитудой) колебания.

Подобные цепи регулирования, с которыми инженер привык иметь дело в технике, особенно в электротехнике, встречаются и в экономике. Они, например, имеют место во взаимоотношениях отдельного занятого экономической деятельностью индивидуума с окружающим миром

---

[1]) Föhl C., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge», стр. 49—75.

и неоднократно становились объектом детального изучения [как, например, в случае циклического колебания цен на продукцию свиноводства («свиной цикл»)].

Несомненно, и макроэкономика состоит из большого числа цепей регулирования, характеризующих взаимосвязь отдельных элементов народного хозяйства. Движение этих элементов в виде периодической смены подъемов и спадов особенно наглядно обнаруживает аналогию с типичным поведением неустойчивых или слабо демпфированных систем автоматического регулирования в технике. В последующем изложении мы ограничимся рассмотрением именно этих процессов, касающихся народного хозяйства в целом.

Г. Гейер [1] в своем докладе указал, что уже представления, из которых исходили Адам Смит и Давид Рикардо, допускают истолкование в терминах теории регулирования. Он показал также, что «Общая теория» Кейнса [2], которому принадлежит заслуга переключения внимания от общей суммы денег, находящихся в обращении, на потоки доходов и их реализацию, представляет собой не что иное, как систему регулирования, хотя сам Кейнс трактовал взаимозависимость капиталовложений, сбережений и степени занятости, которую он пытался выяснить, лишь в рамках статической теории. Что касается моей работы «Создание кредита и экономический кругооборот» [3], на которую Гейер также ссылался, то могу подтвердить, что в то время я при анализе экономического кругооборота стремился выработать основы для исследования конъюнктурных явлений методами теории автоматического регулирования. В этом не было ничего удивительного, поскольку мне в первые годы работы в качестве инженера приходилось заниматься теорией регулирования давления пара в паровых котлах.

Лишь значительно позже я обнаружил, что первые вполне сознательные попытки построения цепи регулирования для народного хозяйства и математического исследования ее устойчивости и колебаний во времени были сделаны несколькими годами раньше.

Первые попытки в этом направлении были предприняты Фришем [4] и почти одновременно с ним Калецким

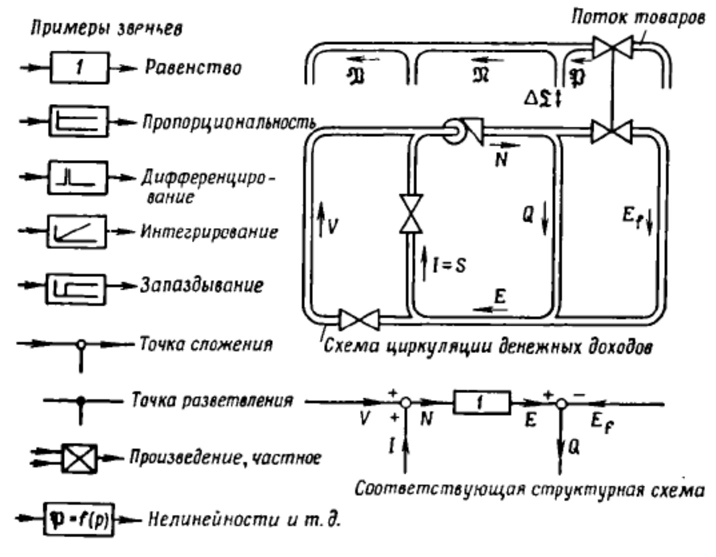
[5] еще в 1933 г., т. е. в период, когда техника автоматического регулирования делала только первые шаги. Позднее оригинальные экономические модели были созданы в первую очередь Лундбергом [6] (1937 г.), Хансеном [7], Самуэлсоном [8] (1939 г.) и Бёги [9] (1946 г.), структурные схемы которых несут на себе характерные черты цепей регулирования. Другие исследователи, такие, как Мецлер [10] (1941 г.), Смит и Эрдли [11], а также Тинберген и Полак [12] (1950 г.) и, наконец, Хикс [13] (1950 г.) и Гудвин [14] (1951 г.), подхватили идеи, выдвинутые предыдущими авторами, дополнив и частично видоизменив их, так что в конце концов выкристаллизовалось нечто вроде определенных школ в этой области исследования. В общем в настоящее время имеется уже значительное количество модельных построений весьма различного характера, так что даже трудно их все перечислить.

В настоящей работе мы прежде всего попытаемся изобразить важнейшие из предложенных моделей графически при помощи единой системы символов, принятой инженерами в теории автоматического регулирования. Полученная таким путем наглядность позволит нам сопоставить и подвергнуть критическому разбору принятые различными авторами гипотезы и проверить их полноту. Затем я предлагаю свою собственную, по методическим соображениям упрощенную модель, условия устойчивости которой рассматривает Тишнер в своем докладе [15]. В заключение будет намечена более совершенная модель, которая, по моему убеждению, учитывает все наиболее существенные зависимости, имеющие значение для поведения народного хозяйства в целом.

Арнольд Тастин в своей книге «Механизм экономических систем», вышедшей в 1953 г. [16], продемонстрировал экономистам возможность использования достигших сейчас высокого развития физических и инженерных методов исследования для анализа процессов регулирования в экономических системах. Воспроизведение народнохозяйственных моделей в форме наглядных схем прохождения сигналов или потоков информации представляет собой первый шаг в указанном направлении.

ОБЩАЯ ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА

Достижение желаемой наглядности затрудняется тем, что все упомянутые выше авторы исходили из весьма различных допущений. Если нарисовать одни только структурные схемы, разработанные отдельными теоретиками, то получатся цепи регулирования, не имеющие



Фиг. 1. Циркуляционная и структурная схемы.

почти ничего общего между собой. Поэтому наша первая задача должна состоять в том, чтобы привести различные работы к общему знаменателю и тем самым сделать возможным их сопоставление.

Чтобы выделить такой общий знаменатель, я снова буду исходить из того же сопоставления потока товаров и встречного ему кругооборота денег, которое явилось исходным пунктом моих предыдущих работ. В верхней части правой половины фиг. 1 поток товаров представлен таким образом, что он движется справа налево.

Произведенные товары $\mathfrak{P}$ либо поглощаются сферой потребления, либо в качестве капиталовложений увеличивают основной капитал народного хозяйства. Потребление и капиталовложения совместно представляют спрос на товары ($\mathfrak{N}$). Если последний отклоняется от уровня производства ($\mathfrak{P}$), то разность товаров либо идет на склад, либо изымается со складов.

В то время как поток товаров возникает на одном конце и исчезает на другом, платежные средства совершают замкнутый кругооборот в противоположном направлении, т. е. по часовой стрелке. Он поддерживается потребностями предпринимателей в товарах, т. е. спросом, действующим подобно насосу, изображенному на схеме. Платежные средства, поступающие к предприятиям в форме спроса N как выручка за проданные товары, подразделяются на доходы E_f обоих факторов производства — *капитала* и *труда*, т. е. на процент и заработную плату, и на прибыль Q предприятий. Эти два потока доходов стекаются в этой простой модели в общий национальный доход E [1]), который при его реализации снова разделяется на поток расходов на потребление V и сбережения S. Расходы на потребление V вливаются в спрос N. Сбережения S служат для финансирования капиталовложений I. Мы вправе положить $I = S$, если считать, что стоимость всех произведенных товаров $\mathfrak{P}$ составляет национальный доход E, так как тогда неизрасходованная часть S должна быть тождественно равна $I (S = I)$. Если же, напротив, S означает только сбереженную часть выплаченных денежных доходов (${}_aS$), то между ${}_aS$ и I могут возникнуть расхождения, подобно тому, как это имеет место на товарной стороне между $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{N}$.

В описанном денежном кругообороте имеются три чувствительные точки, в которых поведение предпринимателей, подобно регулирующему клапану, оказывает воздействие на интенсивность потока доходов и расходов. Первый регулирующий клапан такого рода расположен на

---

[1]) Здесь и далее под «национальным доходом» всюду подразумевается конечный продукт. — *Прим. ред.*

пути потока расходов на потребление. Второй клапан регулирует спрос на капитальные блага. Следовательно, оба клапана определяют объем общего спроса на товары. Третий клапан через предложение рабочей силы регулирует доходы факторов производства, а на товарной стороне — тем самым и объем производства.

Каждый из этих клапанов может входить в свою цепь регулирования. Этому соответствует, например, управление доходами факторов производства, когда решения предпринимателей относительно найма новой рабочей силы принимаются на основе полученной прибыли Q, которая в свою очередь зависит от объема производства, т. е., стало быть, и от доходов факторов производства E_f. В этом случае мы имеем замкнутую цепь регулирования. Определение прибыли играет роль чувствительного элемента, сам предприниматель выступает в роли регулятора, который в зависимости от своей решительности работает с большим или меньшим временем запаздывания (или постоянной времени), а отдел найма рабочей силы является регулирующим органом, определяющим занятость, а вместе с ней и доходы факторов производства.

Однако в результате связи между величинами E, E_f, Q, V и I, представленной на нашей схеме системой трубопроводов, все три регулятора также образуют цепь регулирования, общее поведение которой в конечном итоге и должно стать предметом нашего исследования. Эта объединенная цепь регулирования подходит для роли того общего знаменателя, к которому можно свести различные упомянутые выше модельные построения.

При рассмотрении каждой модели нас будут интересовать три следующих вопроса: 1) Осознал ли автор той или иной модели взаимную связь экономических величин, представленную нашей схемой трубопроводов? 2) К какому из трех управляющих клапанов относятся его исходные предположения? 3) Какие гипотезы он делает относительно регулирования отдельных клапанов? В соответствии с этим мы при графическом изображении будем включать эти исходные предположения в схему денежного кругооборота, соответствующую фиг. 1.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПРИМЕНЯЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Для представления народнохозяйственных связей можно использовать два различных типа эквивалентных схем. В первом случае мы составляем *схему кругооборота (циркуляционный контур)*, в которой поток денег и товаров изображается в виде потока жидкости, как показано в верхней части правой половины фиг. 1. Во втором случае составляется *схема потока информации (диаграмма прохождения сигналов)*, которая по существу представляет собой лишь символическое изображение математических соотношений между различными величинами. Часто бывает, что замкнутый контур циркуляции жидкости представляется соответствующей схемой потока информации уже не в виде замкнутой, а в виде разомкнутой цепи. Это показано в нижней части фиг. 1 справа. В дальнейшем изложении для наглядности будем в большинстве случаев изображать наряду с циркуляционными контурами также и диаграммы прохождения сигналов в отдельных системах.

Циркуляция жидкости по замкнутому контуру обеспечивается насосом, который прокачивает жидкость через систему трубопроводов. Далее, имеются клапаны, которые на отдельных участках трубопровода ослабляют соответствующую долю потока, и имеются точки измерения (обозначаемые на схеме черными кружками), в которых производится замер отдельных потоков, причем результаты этих измерений при помощи дополнительных управляющих устройств оказывают воздействие на установку соответствующих клапанов. В отличие от этого для схем потоков информации применяются некоторые особые обозначения, приведенные в левой части фиг. 1.

Отдельные «звенья» на схеме потоков информации указывают, что между выходной и входной величинами данного звена имеется функциональная зависимость, причем входная величина является независимой переменной, а выходная величина устанавливается в зависимости от входной величины. Условные обозначения звеньев приведены на фиг. 1. Место сложения двух

сигналов обозначается белым кружком, а место разветвления сигналов — черной точкой. Умножение и деление изображаются прямоугольником, перекрещенным косым крестом. Нелинейные звенья не имеют стандартных обозначений.

Рассмотрим еще раз правую часть фиг. 1, чтобы ближе познакомиться с принципом составления схем, изображающих движение потоков информации. Приведенная здесь система потока товаров и кругооборота денег и доходов полностью задается следующими тремя уравнениями:

$$V+I=N; \quad N=E; \quad E_f+Q=E.$$

Эти три уравнения можно непосредственно получить из простого рассмотрения схемы потока информации. Мы видим, что имеются три независимых параметра: V, I и E_f, играющих роль входных величин системы, и что величина Q, представляющая собой выходную величину, получается как зависимый параметр.

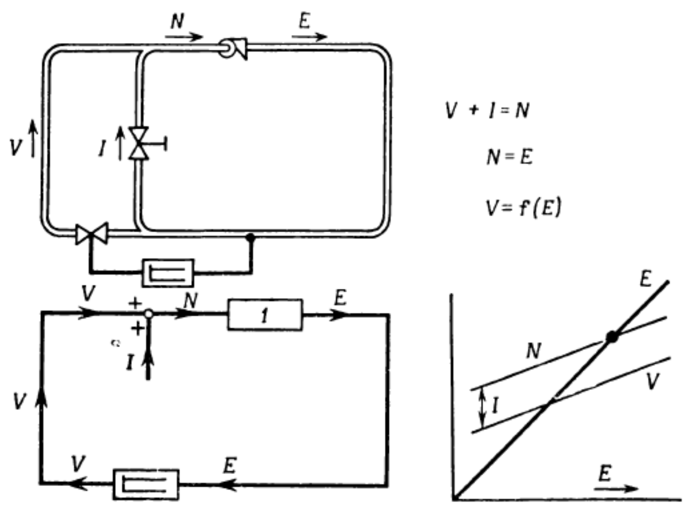
В дальнейшем мы на схемах для большей наглядности будем выделять штриховкой те блоки, в которых в схему потока информации вводится запаздывание. Это относится как к переходным функциям с временем нарастания и временем запаздывания, так и к функциям интегрирования. Такие заштрихованные блоки мы вправе рассматривать как фактические источники колебаний данной цепи регулирования.

ПОТОКИ ИНФОРМАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Рассмотрим сначала модель Кейнса, хотя ее фактически нельзя отнести к динамическим системам. «Общая теория» Кейнса является статической теорией, теорией равновесия. Она устанавливает, что прибыль Q можно исключить из рассмотрения, и задает ее так, чтобы в состоянии равновесия $Q = 0$. Кейнс делит общий валовой доход на потребление V и сбережения S и приравнивает

S капиталовложениям I. Таким образом, его модель можно представить циркуляционной схемой, изображенной в левой верхней части фиг. 2.

В основе его теории лежит предположение о том, что потребление V является мгновенной функцией доходов E. Эта гипотеза в нашей циркуляционной схеме представлена линией потока информации, в которой поток E



Фиг. 2. Модель Кейнса.

определяется измерительным прибором; в соответствии с данными этих измерений устанавливается вентиль, расположенный в линии потока потребления, причем включенный между ними промежуточный блок представляет функцию потребления $V = f(E)$.

Математическое содержание модели Кейнса может, таким образом, быть выражено системой следующих трех уравнений:

$$V + I = N; \quad N = E; \quad V = f(E).$$

Соответствующая этому случаю схема потока информации изображена в нижней левой части фиг. 2. Она

представляет собой замкнутую цепь, в которой поступающей извне входной величиной являются капиталовложения I. Как только капиталовложения I заданы, все другие величины получаются как зависимые переменные. Это согласуется с построением, изображенным в правой половине фиг. 2, при помощи которого Клейн и Самуэлсон графически поясняют теорию Кейнса.

Ни одна из трех функций не содержит зависимости от времени. Поэтому очевидно, что система носит статический характер. Но положение сразу меняется, как только мы для зависимости V от E принимаем функцию, содержащую время запаздывания:

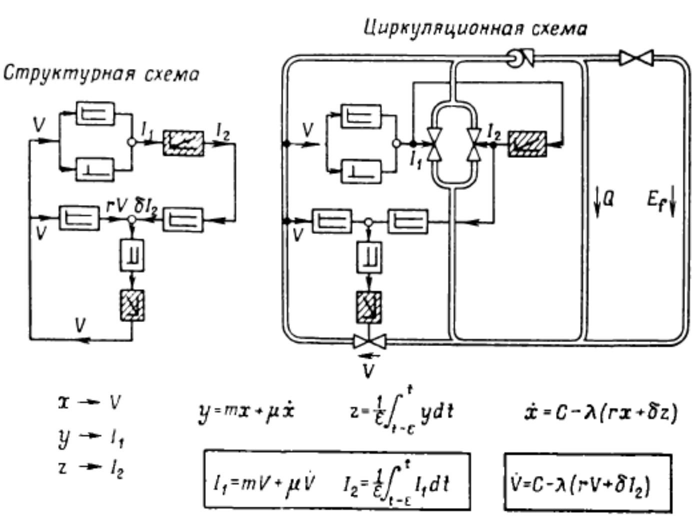
$$V(t) = f\{E(t - T_t)\},$$

что является существенным отличительным признаком модели, предложенной Робертсоном. Благодаря этому шагу статическая модель Кейнса превращается в динамическую систему. К сожалению, однако, при этом перестает быть справедливым уравнение $N = E$, в чем легко убедиться при взгляде на диаграмму Клейна — Самуэлсона, где точка пересечения линий $E — N$ определяет положение равновесия. Введение так называемого «запаздывания Робертсона», следовательно, требует дальнейшего усовершенствования модели Кейнса, связанного с учетом несовпадения величин E и N и изменением прибыли вне состояния равновесия.

Трудность описания различных моделей заключается в том, что разные авторы обозначают одни и те же народнохозяйственные показатели различным образом. Чтобы можно было сопоставлять положенные в основу разных моделей предположения, переведем применяемые различными авторами символы на язык наших обозначений. На фиг. 3—5 и 7 указаны математические предположения в символах авторов, дан перевод этих символов в принятые нами обозначения (например, на фиг. 3: $x \rightarrow V$, $y \rightarrow I_1$, $z \rightarrow I_2$) и, наконец, в рамке приведены те же предположения уже в наших обозначениях. На самих схемах указаны лишь наши условные обозначения.

Рагнар Фриш в 1933 г. привел одну из первых по времени «динамических» моделей (фиг. 3), хотя еще и

не изобразил кругооборота доходов. Он рассматривает регулирование только двух величин, а именно капиталовложений и расходов на потребление. Объем производства и доходы факторов производства, по его мнению, видимо, непосредственно определяются этими двумя величинами.



Фиг. 3. Модель Фриша.

Новые капиталовложения, предпринятые за некоторый период (y), согласно его предположению, управляются в соответствии с уравнением $y = mx + \mu\dot{x}$ величиной расходов на потребление (x) и одновременно ее изменением во времени ($\dot{x}$). Последнее предположение составляет именно ту гипотезу, которая впоследствии под названием *акселератора* приобрела широкую известность и ныне стала привычным элементом всех новых моделей.

Особый интерес в модели Фриша представляет предположение о наличии второй компоненты капиталовложений (z). Эта компонента возникает в связи с окончанием ранее предпринятых долгосрочных капиталовложений,

осуществление которых требует отрезка времени в несколько (ε) периодов. Ее величина задается уравнением

$$z=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} y\,dt.$$

Это предположение, заимствованное Фришем у Афталиона, впоследствии, к сожалению, было несправедливо забыто.

Относительно регулирования расходов на потребление Фриш выдвигает предположение, что их изменение во времени $\dot{x}$ определяется недостатком денежных средств, которые, как он считает, зависят от расходов на потребление x и компоненты капиталовложений z Афталиона. В итоге он получает уравнение

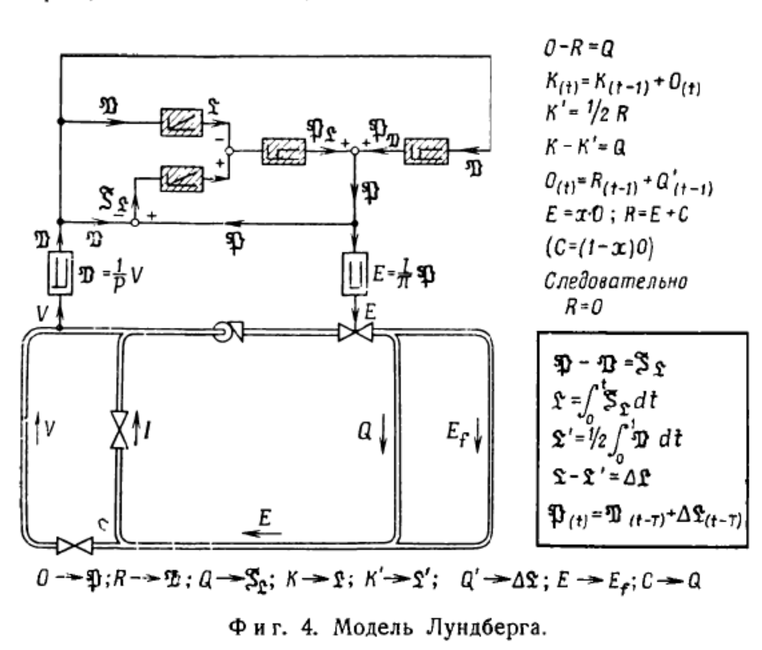
$$\dot{x}=c-\lambda(rx+\delta z).$$

Эта гипотеза недостаточно обоснована и, по-моему, неоправдана. По-видимому, Фриш еще не уяснил себе в то время истинной зависимости расходов на потребление от общей суммы валового дохода.

Применяемые Фришем переходные функции не содержат ни времени запаздывания, ни времени нарастания. Единственное присутствующее в структурной схеме запаздывание обусловлено гипотезой Афталиона. Благодаря ей функция интегрирования $\int y\,dt$ путем деления на коэффициент ε, имеющий размерность времени, вновь превращается в поток z, так что вся функция соответствует изображенной на нашей схеме переходной функции. Следовательно, единственным источником вычисленных Фришем колебаний является используемая им гипотеза Афталиона.

Лундберг (1937 г.) исходил из совершенно иных допущений, чем Фриш (фиг. 4). Он не рассматривает ни деления потока доходов на расходы на потребление и спрос на капитальные блага, ни деления доходов на доходы факторов производства и предпринимательскую прибыль. Предметом его исследований является лишь

регулирование производства в товарной сфере, причем, по его мнению, объем производства O_t задает одновременно и валовой доход и общие расходы (R_t) предпринимателей. Однако он выделяет из валового дохода некоторую часть [обозначаемую нами как $(1-x)O_t$], которая, по его мнению, «не создает доходов». Несколько



Фиг. 4. Модель Лундберга.

позднее он вновь присоединяет извне к потоку доходов некоторые расходы на потребление C, очевидно, не связанные органически с системой, причем эти независимые расходы на потребление равны по величине ранее выделенной части доходов. Все это наводит на мысль, что Лундберг был близок к пониманию проблемы предпринимательской прибыли и образования богатства в результате непреднамеренных изменений запасов, хотя и не смог достигнуть полной ясности в этом вопросе.

Лундберг предполагает, что предприниматели регулируют объем производства O_t, с одной стороны, по спросу на товары R_t, а с другой стороны, по отклонению Q_t фактического уровня K_t складских запасов от заданного уровня K'_t, который, по предположению, пропорционален спросу на товары. Фактическое состояние K_t он получает путем интегрирования увеличения и уменьшения товарных запасов, представляющих разности между производством O_t и сбытом товаров R_t. Переходная функция должна иметь вид

$$K_t = \int_0^t Q_t\,dt.$$

Параметр сравнения K'_t также не является потоком, а представляет собой результат интегрирования, так что следует писать не $K'_t = \frac{1}{2} R_t$, а

$$K'_t = \frac{1}{2} \int_0^t R_t\,dt.$$

Как для процесса возмещения сбытых товаров (их воспроизводства. — *Прим. ред.*), так и для той части продукции, которая служит для пополнения складских запасов продукции до заданного уровня, Лундберг предполагает наличие времени запаздывания, равного одному периоду; это означает, что предприниматели регулируют выпуск продукции по наблюдаемым результатам производства за предыдущий период. Эти запаздывания во времени, которые мы на схемах отмечаем штриховкой обеих переходных функций, известны в литературе как «запаздывания Лундберга». В схеме Лундберга они играют роль источников колебаний системы.

Рассмотрение циркуляции доходов у Лундберга неполно и неточно. При переходе от товарной сферы к денежной и обратно каждый раз должна вводиться переходная функция, причем справедливо равенство $E = \frac{l}{\pi}\mathfrak{P}$,

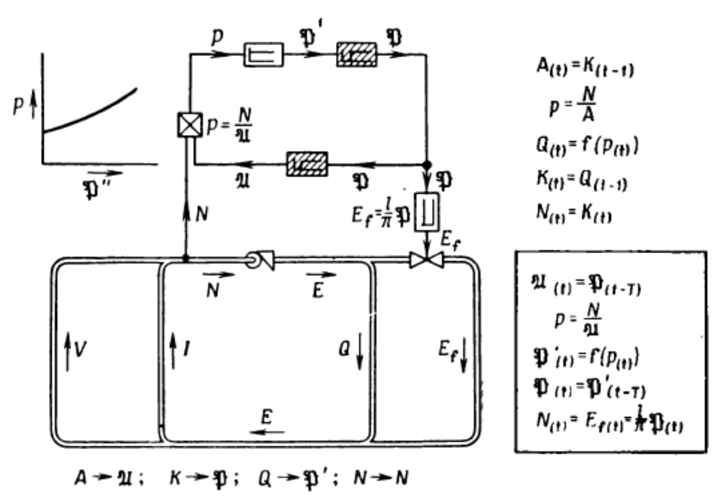
где $\mathfrak{P}$ — объем производства (O_t), l — почасовая заработная плата и π — производительность труда, выраженная в количестве произведенных предметов за один час работы. Соответственно этому потребление товаров $\mathfrak{V} = V/p$, где V — расходы на потребление и p — цена в денежных единицах каждого изготовленного предмета. Это замечание показывает, что Лундберг совершенно неправомерно считает постоянной цену товара p, которая также является зависимой переменной.

Мецлер (1941 г.) дополнил модель Лундберга, введя в качестве параметра, управляющего объемом производства, коэффициент ожидаемого сбыта. Он предполагает, что предприниматели, принимая решения о производстве товаров, руководствуются не только размерами спроса на товары за предшествующий период, но и изменением этой величины во времени и что ожидаемые ими прибыли рассчитываются путем экстраполяции предшествовавшего изменения прибылей на будущее. Идеи Мецлера можно применить к системе с любым видом управления объемом производства.

Бёги (1946 г.), подобно Лундбергу, рассмотрел только регулирование производства в товарной сфере (фиг. 5). Он непосредственно, без введения какой-либо переходной функции, приравнивает общий спрос N в денежном выражении объему производства K_t. При этом не рассматривается деление потока доходов на доходы факторов производства и прибыль, а также на расходы на потребление, сбережения и спрос на капитальные блага, хотя его работа появилась спустя много лет после выхода «Общей теории» Кейнса.

Зато он выдвигает другую, весьма плодотворную идею о том, что уровень производства регулируется предельными затратами всей совокупности предприятий при посредстве цены на товары, которая, по его теории, образуется как частное от деления денежного спроса N на предложение товаров A. Бёги считает прежде всего, что готовность предпринимателей к производству Q является мгновенной функцией образованной таким путем цены. Он предполагает, что спустя один период за ней следует

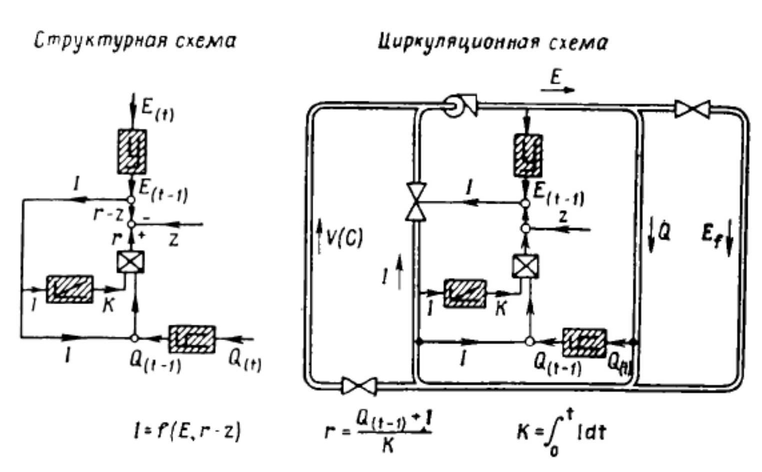
фактическое производство K и что затем проходит еще один период, прежде чем произведенные товары появляются на рынке в качестве предложения товаров A. Следовательно, можно сказать, что Бёги использует двойное запаздывание Лундберга.



Фиг. 5. Модель Бёги.

Если в системе Лундберга не играет роли цена на товары p, то Бёги пренебрегает влиянием непроизвольных изменений складских запасов, которые имели решающее значение в модели Лундберга. Он до некоторой степени предполагает, что производятся лишь скоропортящиеся, не пригодные для длительного хранения товары, которые сразу должны быть реализованы, независимо от того, высока или низка их цена. Это предположение, конечно, также далеко от реальности. Адекватное описание регулирования производства через ценообразование и изменение складских запасов становится возможным только путем комбинации гипотез Лундберга и Бёги. Ниже мы попытаемся использовать такое сочетание обеих гипотез.

Калецкий (1933 г.), который одним из первых исследовал народнохозяйственную цепь регулирования, первоначально интересовался, по-видимому, только регулированием капиталовложений. Он высказал, на мой взгляд, несомненно правильную идею о том, что на уровень капиталовложений оказывает влияние также и объем национального дохода. Но уже в своей первой работе



Фиг. 6. Модель Калецкого — Тинбергена.

Калецкий подчеркнул, что и сумма всего основного капитала народного хозяйства влияет на величину капиталовложений. В 1939 г., он, по-видимому, под влиянием «Общей теории» Кейнса облек эти идеи в форму системы регулирования, которая впоследствии была дополнена Тинбергеном и Поллаком (фиг. 6).

Калецкий вычисляет ожидаемую рентабельность r как частное от деления ожидаемой предпринимательской прибыли на величину основного капитала и противопоставляет ее ставке процента z, которая мыслится им заданной извне. Это полностью соответствует сравнению «предельной эффективности капитала» со ставкой процента у Кейнса.

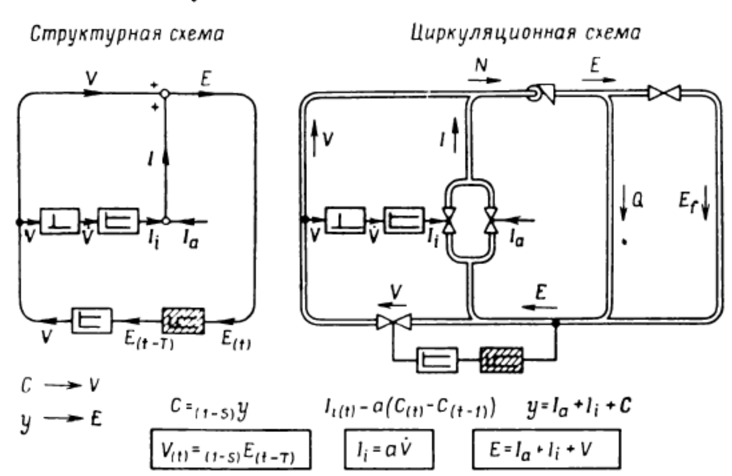
В схеме потока информации все эти связи наглядно представлены таким образом, что передаваемая с запаздыванием измеренная прибыль Q_t, увеличенная на сумму капиталовложений I, в качестве ожидаемой прибыли $Q_{t-1}+I$ поступает к сравнивающему устройству, которое образует из этой величины и из полученной путем интегрирования величины I стоимости K основного капитала частное r. Из r затем вычитается задаваемая извне ставка процента z. Вызывает, однако, большие сомнения, допустимо ли рассматривать сумму $Q_{t-1}+I$ как «ожидаемую прибыль».

Модель Калецкого была дополнена Смитом и Эрдли введением зависимости расходов на потребление $C = f(E)$ от доходов. Эта зависимость является аналогом функции сбережений $S = f(E)$, которая в «Общей теории» Кейнса, а также в работе автора об экономическом обращении играет решающую роль при определении устойчивого положения уровня занятости. Исходя из этой зависимости Кан еще в 1933 г. пришел к выводу, что при дополнительных капиталовложениях национальный доход возрастает на величину, превышающую эти капиталовложения в $1/s$ раз, где $s = S/E$ — предельная склонность к сбережению получателей доходов. Под названием «мультипликатор» эта зависимость уже стала привычным элементом современных моделей.

Хансен, Самуэлсон (1939 г.) и Хикс (1950 г.) объединили в своих моделях этот мультипликатор с упомянутым выше акселератором. Характерной чертой разработанных ими схем регулирования является, следовательно, то, что, с одной стороны, расходы на потребление регулируются действием мультипликатора капиталовложений, а с другой стороны, сами капиталовложения управляются изменением во времени расходов на потребление (фиг. 7).

При этом предполагается, что расходы на потребление зависят не от доходов, полученных за тот же период, а от доходов за некоторый предыдущий период. Это предположение впервые было сформулировано Робертсоном, который исходил из того, что доходы выплачиваются лишь по истечении определенного промежутка

времени после того, как они заработаны, и что только выплаченные доходы можно израсходовать или накопить в виде сбережений. Это время запаздывания обозначается как «запаздывание Робертсона». По-видимому, практически оно играет лишь незначительную роль в доходах отдельных факторов производства. Что же касается доходов получателей дивидендов, то для них оно может иметь существенное значение.



Фиг. 7. Модель мультипликатора-акселератора.

Запаздывание Робертсона имеет место между доходами Y_t и расходами на потребление C_t, так что каждый раз остается величина $S_t = sY_t = I_i$. Поэтому в схеме потока информации запаздывание Робертсона представлено не просто звеном в потоке расходов на потребление C. Соответственно регулирование расходов на потребление должно осуществляться регулирующим органом, который в свою очередь управляется величиной Y_{t-1}, образованной из Y_t с учетом времени запаздывания.

Кажется очевидным, что в развивающейся экономике основной капитал должен расти пропорционально потреблению и что при этом требуемые капиталовложения

зависят не от объема национального дохода, а от его изменения во времени, но я все же не думаю, что этой зависимости следует придавать особое значение при фактическом определении уровня капиталовложений в ходе конъюнктурных колебаний. С одной стороны, следует иметь в виду, что в период депрессии почти всегда имеются в наличии значительные массы неиспользованного основного капитала. С другой стороны, отдельные предприниматели в надежде вытеснить предельных производителей с рынка сбыта сообразуют свои капиталовложения не с ростом общего национального дохода, а со своими собственными прибылями, которые являются функцией самого национального дохода, а не его изменения во времени. Следовательно, регулирование посредством акселератора, как мне кажется, требует еще тщательного исследования.

Хикс в основном использует модель, разработанную Хансеном и Самуэлсоном. Он заставляет и акселератор работать с запаздыванием во времени. В отношении непреднамеренных изменений запасов товаров он снова использует выдвинутое Лундбергом допущение. Мне кажется, что заслуживает внимания также его указание на периодическое повторение расходов на возмещение основного капитала, первоначально одновременно установленного и имеющего примерно одинаковый срок службы. Это явление, по-видимому, независимо от Хикса было подробно исследовано также Герцогом в работе [17], опубликованной в 1951 г. Принимая во внимание, что капиталовложения наращиваются в период конъюнктурного подъема и что почти повсюду в мире парк станков обновляется каждые десять лет, склоняешься к мысли, что этот эффект реинвестиции имеет большее значение, чем ему приписывается в теории Хикса.

Гудвин (1951 г.) еще несколько приблизил модель Хансена — Самуэлсона к реальным условиям, введя в схему управления капиталовложениями верхний предел в виде полного использования производственных мощностей в отраслях, производящих капитальные блага, и нижний предел в виде недовозмещения износа основного капитала. Этим он, однако, вводит в цепь регулиро-

вания одну из тех нелинейностей, которые доставляют столько хлопот математикам при исследовании устойчивости систем.

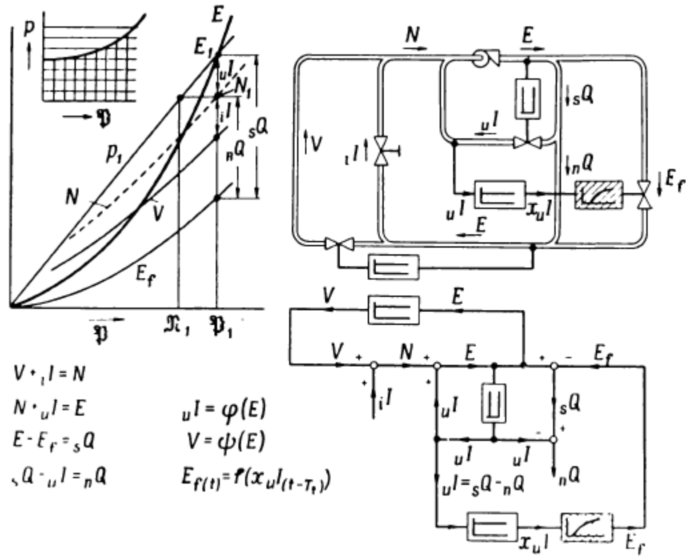
УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРА

Лундберг полагал, что производство регулируется стремлением предпринимателей поддерживать заданный уровень складских запасов. Бёги исходил из предположения, что уровень производства регулируется ценой на товары, образующейся как частное от деления спроса на предложение товаров. Но вполне возможно исходить и из того, что при увеличении занятости предприниматели руководствуются размером ожидаемых прибылей и до тех пор изменяют уровень производства, пока фактические прибыли не будут соответствовать ожидаемым. Связь между изменением складских запасов, ценой и прибылью иллюстрируется графиками E и N, приведенными на фиг. 8.

Эти графики были получены путем интегрирования штучных издержек и прибылей, необходимых для покрытия предельных затрат в известной диаграмме средних штучных издержек, использованной и Бёги. Она изображена в верхней части фиг. 8. Участкам площади, заштрихованным горизонтальными линиями, на диаграмме средних штучных издержек соответствуют ординаты кривой E, а участкам площади с вертикальной штриховкой — ординаты кривой E_f. Если считать, что из издержек производства исключены амортизационные расходы, а также та часть затрат, которая представляет поставки и услуги одних предприятий другим, то ординаты кривой E_f изображают доходы факторов производства, возникающие при осуществлении производственного процесса, соответствующего данному значению абсциссы, а ординаты кривой E — соответствующий национальный доход (конечный продукт).

Расстояние между обеими кривыми по вертикали характеризует предпринимательскую прибыль $_sQ$, получающуюся, когда цена p как раз еще покрывает расходы

предельного производителя, продукция которого необходима для обеспечения соответствующего объема производства. Кривые E и E_f, а также расстояние между ними по вертикали $_sQ$ задаются самой структурой экономики и не зависят от поведения предпринимателей.



Фиг. 8. Регулирование производства по прибыли.

Из функций затрат $V_f = f(E_f)$ и $V_u = f(_sQ)$, которые следует считать заданными, можно получить общие расходы на потребление V как функцию объема производства $\mathfrak{P}$. Если к ним добавить капиталовложения I как постоянную или тоже увеличивающуюся с ростом $\mathfrak{P}$ величину, то получается кривая N общего спроса на товары, пересекающая кривую E. Точка пересечения обеих кривых указывает тот уровень производства, для которого при сделанных допущениях степень занятости может оставаться в состоянии равновесия.

Если, например, достигается более высокий уровень производства $\mathfrak{P}_1$, скажем, в силу того, что как раз имелась цена p_1, то возникающий спрос N_1 будет меньше E_1.

Вследствие этого часть произведенных товаров $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{N}_1$ не находит сбыта, причем величина $\mathfrak{N}_1$ может быть найдена как точка пересечения горизонтальной прямой, проходящей через точку N_1, с вектором цены p_1. Величина этой нереализуемой массы товаров $(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{N}_1) p_1$ составляет непредусмотренные капиталовложения $_uI$ и представляет на графике расстояние между кривыми E и N по вертикали.

Схема регулирования по Лундбергу сводилась к тому, что предприниматели стремятся свести эти непредусмотренные капиталовложения к нулю. Предположение Бёги означало, что цена p до тех пор обусловливает изменение производства, пока она не примет значения, равного отношению ординаты точки пересечения кривых E и N к абсциссе этой точки. Нам кажется целесообразным выдвинуть предположение, что предприниматели стремятся изменять производство до тех пор, пока разность между прибылью $_sQ$ и непредусмотренными капиталовложениями $_uI$, иначе говоря, обусловленная спросом на товары прибыль $_nQ$ не станет равной общей прибыли $_sQ$, т. е. пока не исчезнут непреднамеренные капиталовложения.

Дополним это предположение, касающееся регулирования уровня производства, известной гипотезой о мультипликаторе, относящейся к расходам на потребление. Допустим также, что капиталовложения I можно задавать произвольно, например путем независимого выбора ставки процента, как это соответствует и «Общей теории» Кейнса. Мы получим в итоге чрезвычайно простую цепь регулирования (см. фиг. 8), в которой фигурируют лишь величины из сферы денежного кругооборота и не требуется перехода в товарную сферу.

Я вполне отдаю себе отчет в том, что выдвинутая здесь гипотеза не может точно передать действительный механизм регулирования производства, так как в конечном счете вариации цен являются тем фактором, который обусловливает подключение, или, наоборот, отключение от процесса производства предельных производителей и тем самым осуществляет регулирование объема производства. Однако преимущество этой модели

состоит в ее простоте, и это обстоятельство делает ее особенно пригодной в качестве дидактической основы при изложении методов математического исследования поведения систем регулирования.

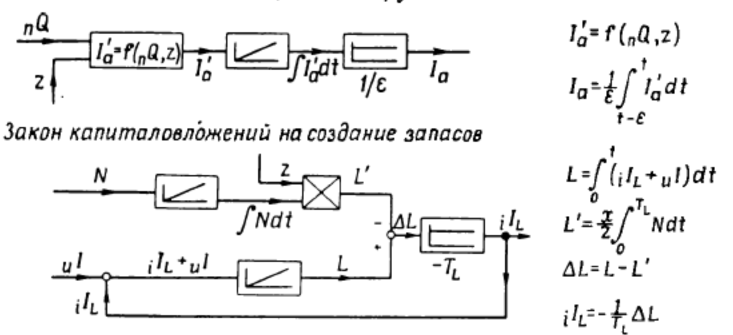
Об этих исследованиях говорит в своем докладе проф. Тишнер [15].

На фиг. 8 представлена структурная схема модели в таком виде, что непреднамеренное изменение товарных запасов $_uI$, являющихся в свою очередь функцией E, по истечении некоторого времени, соответствующего времени реакции предпринимателей, определяет уровень занятости, а с ним и доходы факторов производства E_g. Эта модель была еще несколько упрощена Тишнером. В структурной схеме, положенной в основу его выкладок, была представлена лишь циркуляция денег, причем вместо национального дохода E фигурирует только спрос N, так как разность $_uI$ этих двух величин препятствует возникновению потока денежных доходов. Поток прибылей, остающийся от спроса N после ответвления от него доходов факторов производства E_f, в этом случае непосредственно равен $_nQ$. Сравнивающее устройство в цепи регулирования Тишнера сопоставляет эту величину с суммой прибылей $_sQ$, которая, как показала диаграмма, приведенная на фиг. 8, является функцией E_f. Второй регулируемой величиной, воздействующей на сравнивающее устройство в цепи Тишнера, является E_f. Предположение о пропорциональности между величинами $_sQ$ и E_f, характеризуемой коэффициентом пропорциональности e, является упрощающим допущением. В действительности мы и здесь имеем дело с нелинейной зависимостью.

ПОПЫТКА ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Обобщенная модель, конечно, еще не означает совершенную модель. Экономическая действительность настолько многообразна, что еще очень часто будет возникать необходимость в принятии дополнительных предпо-

ложений для все более полного приближения к действительности. Однако тем не менее обобщенная модель должна содержать достаточные и близкие к реальности гипотезы относительно регулирования расходов на потребление, спроса на капитальные блага и общего объема производства.

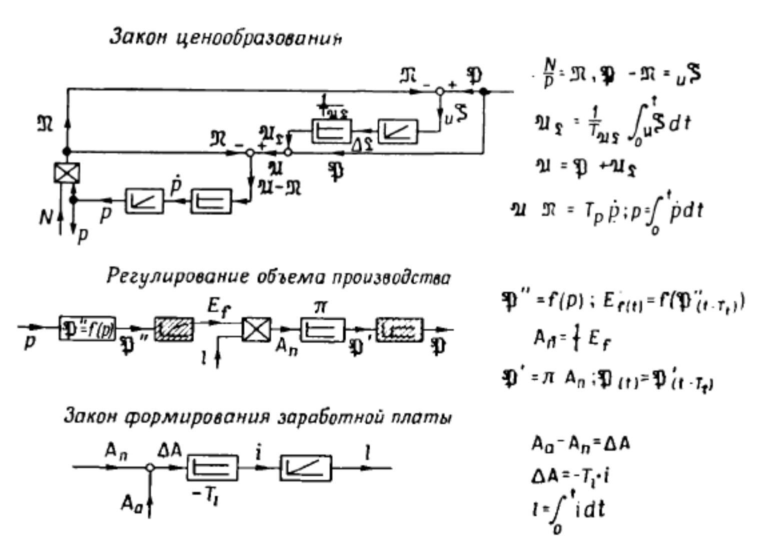


Фиг. 9. Элементы обобщенной модели.

На фиг. 11 (стр. 116) я попытался набросать схему такой обобщенной модели, руководствуясь при этом принципом: «испробуйте все и сохраните наилучшее». При этом, впрочем, обнаружились все еще существенные пробелы как в области регулирования объема производства, так и в отношении определения зависимости капиталовложений от различных факторов; заполнение этих пробелов доставило немалые трудности.

Я могу себе представить, что при первом ознакомлении с нагромождением линий на этой обобщенной схеме у экономистов немножко закружится голова, хотя у электриков-слаботочников, привыкших иметь дело со

сложными электрическими схемами, относительная примитивность этой схемы может вызвать лишь улыбку сострадания. Но вместе с тем я не упускаю из виду и то, что, возможно, в самом недалеком будущем мы станем свидетелями основательного сближения методов обеих этих областей знания.



Фиг. 10. Элементы обобщенной модели.

Чтобы облегчить понимание схемы, целесообразно сначала рассмотреть регулирование отдельных народнохозяйственных величин порознь. На фиг. 9 и 10 в виде соответствующих потоков информации отдельно представлены принятые за основу законы образования процента, инвестиций в основной капитал, капиталовложений в запасы, цен, объема производства и заработной платы и указаны положенные в их основу математические соотношения.

Для первой чувствительной точки — расходов на потребление — я, разумеется, использовал функцию мультипликатора $V = f(E)$. Для учета времени запаздывания

я ввел в нее «запаздывание Робертсона», записав функцию следующим образом:

$$V_{(t)}=f(E_{(t-T_t)}).$$

Далее я ввел в эту функцию влияние уровня цен p и ожидаемого уровня цен, представленного величиной $\dot{p}$, т. е. первой производной p по времени. В результате функция потребления приобрела следующую форму:

$$V_{(t)}=f[E_{(t-T_t)},\ (p_{(t)}+\dot{p}_{(t)})].$$

Введение подобной функции основано, естественно, на довольно произвольном допущении. Потребуется еще много усилий для того, чтобы выяснить, каков действительный вид указанной зависимости между величинами V, E и p.

Дополненную таким образом функцию потребления я отдельно применил к доходам факторов производства и к предпринимательской прибыли, поскольку количественное соотношение между расходами и доходами в обоих случаях может быть весьма различным и так как предпринимательская прибыль и доходы факторов производства изменяются независимо друг от друга.

Затем я отметил различие между заработанным и выплаченным доходом факторов производства, а также между заработанными и выплаченными предпринимательскими прибылями. В то время как расходование доходов факторов производства, по всей вероятности, в первую очередь должно зависеть от доходов, заработанных в более ранний период, для предпринимательской прибыли этого нельзя с уверенностью утверждать. Расходы на потребление участников фамильных фирм, по-видимому, будут зависеть от заработанной прибыли $_nQ$, в то время как доходы акционеров, которым выплачиваются дивиденды, определяются размером выплаченных прибылей $_aQ$. Соответствующие уравнения, если пренебречь влиянием цен, имеют вид

$$V_{f(t)}=f(E_{f(t-T_t)}),$$

$$V_{g(t)}=f(c_1\cdot {}_nQ_{(t-T_t)}+c_2\cdot {}_aQ_{(t-T_t)}).$$

Перейдем теперь ко второй чувствительной точке — регулированию объема капиталовложений. Поскольку капиталовложения, несомненно, каким-то образом зависят от ставки процента, мне сначала пришлось выяснить, как образуется самый процент. Это оказалось не так просто, так как классическая теория, по которой ставка процента определяется сбережениями, очевидно, несостоятельна, а современная теория «ликвидности», предложенная Кейнсом и мной в 1937 г., не получила всеобщего признания и по крайней мере до настоящего времени не была сформулирована математически.

Возможно, что возникновение процента можно объяснить следующим образом. Примем, что скорость обращения денег, хотя она сама по себе представляет, несомненно, достаточно сложную величину, задана в виде постоянной и независимой величины u. Тогда масса денег, необходимых для обращения, равна

$$G_b = \frac{N}{u}.$$

Пока существует разность ΔG между требуемой массой денег G_b и имеющейся в наличии массой G_v, она будет вызывать понижение ставки процента с определенной скоростью. Эту гипотезу можно выразить с помощью следующего уравнения:

$$\Delta G = G_v - G_b = -T_z \cdot \dot{z},$$

где величина T_z имеет размерность времени. Это тоже не более чем предположение, которое еще нуждается в проверке. Если оно окажется справедливым, то ставка процента может быть вычислена интегрированием

$$z = \int_0^t \dot{z}\, dt.$$

Написанные выше уравнения соответствуют схеме потоков информации, изображенной в верхней части фиг. 9.

Ставка процента достигает равновесного состояния, когда разность ΔG становится равной нулю, а это будет иметь место тогда, когда вследствие реакции капитало-

вложений на ставку процента общий спрос N, а вместе с ним и требуемая масса денег $G_b = N/u$ настолько возрастут, что G_b станет равным G_v.

При изложении механизма управления капиталовложениями я рассматривал отдельно друг от друга две составные части капиталовложений, а именно вложения в основной капитал, которые всегда являются преднамеренными капиталовложениями, и запланированные капиталовложения в запасы. Инвестиции в основной капитал особенно чувствительны к размеру ставки процента.

Относительно принимаемого другими авторами механизма действия акселератора при регулировании капиталовложений я уже высказал выше свои сомнения. Однако вполне можно допустить, что решения предпринимателей о капиталовложениях зависят от уровня занятости или от ожидаемых прибылей, которые, как это видно из графиков E и N, изображенных на фиг. 8, сами в свою очередь являются функцией уровня занятости. С повышением степени занятости растет число предпринимателей, получающих дифференциальную прибыль, а дифференциальные прибыли тех из них, которые работают с относительно рентабельным оборудованием, повышаются. При прочих равных условиях это должно привести к росту капиталовложений. Поэтому запланированные вложения в основной капитал I_a' должны выражаться формулой

$$I_a' = f({}_nQ,\ z).$$

Здесь мы снова имеем широкое поле для дальнейших исследований. Фактический ежегодный спрос на капитальные блага можно в этом случае вычислить путем применения к величине I_a' интеграла Афталиона

$$I_a = \frac{l}{\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} I_a'\, dt,$$

где ε — среднее количество лет, необходимых для осуществления запланированных капиталовложений. Соответствующая схема потоков информации изображена в средней части фиг. 9.

В отношении регулирования намеченных капиталовложений в запасы, я, подобно Лундбергу, исходил из предположения, что предприниматели пытаются возместить или реализовать в течение определенного времени T_L разность ΔL между фактическим объемом товарных запасов L и запланированными запасами L'. В соответствии с этим мы должны были бы для капиталовложений в запланированные запасы ${}_lI_L$ записать соотношение

$$ {}_lI_L = -\frac{l}{T_L}\Delta L, $$

где $\Delta L = L - L'$.

Плановые товарные запасы L' мы получим путем интегрирования спроса N за определенный промежуток времени $T_{L'}$. Можно предположить, что ставка процента z, которая определяет издержки хранения запасов, также оказывает известное влияние на запланированный объем запасов. Поэтому можем написать

$$ L' = \frac{x}{z}\int\limits_0^{T_{L'}} N\,dt. $$

С другой стороны, фактические размеры запасов мы получим путем интегрирования суммы запланированных и незапланированных капиталовложений в запасы в виде

$$ L = \int\limits_0^t ({}_lI_L + {}_uI)\,dt. $$

Эти уравнения соответствуют схеме потока информации, изображенной в нижней части фиг. 9.

Теперь мы можем перейти к третьему, и последнему, чувствительному звену, а именно к механизму регулирования совокупного продукта. Здесь прежде всего возникает задача: найти подходящую гипотезу для ценообразования. Это может показаться неожиданным, так как все мы привыкли к мысли, что цены формируются соотношением спроса и предложения и что по этому вопросу нельзя сказать чего-либо нового. Но если мы приравняем

спрос произведенному продукту, то придем как раз к модели Бёги, которая не ведет к цели.

Мне хотелось бы предложить рассматривать спрос $\mathfrak{A}$ как сумму двух компонент — объема производства $\mathfrak{P}$ и второй, положительной или отрицательной составляющей $\mathfrak{A}_L$, представленной товарами, которые либо предлагаются со склада, либо удерживаются из произведенного продукта для пополнения товарных запасов. Таким образом, для спроса мы получаем величину

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{P}+\mathfrak{A}_L.$$

Подобно капиталовложениям в запасы мы вновь должны предположить, что предприниматели будут в течение определенного промежутка времени $T_{\mathfrak{A}L}$ стараться возместить или реализовать разность между фактическими и запланированными запасами. Так как эти расхождения в величине запасов являются результатом интегрирования незапланированных капиталовложений в запасы, то мы можем написать

$$\mathfrak{A}_L=\frac{l}{T_{\mathfrak{A}L}}\int_0^t {}_u\mathfrak{J}\,dt,$$

где ${}_u\mathfrak{J}=\mathfrak{P}-\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}=N/p$. Пока существует разность между спросом и предложением $\mathfrak{A}-\mathfrak{N}$, она будет вызывать падение цен. Поэтому аналогично нашей формуле для образования процента положим

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{N}=-C_p\dot{p},$$

где C_p — постоянная величина. Тогда цена p получится путем интегрирования

$$p=\int_0^t \dot{p}\,dt.$$

Соответствующая схема потока информации изображена в верхней части фиг. 10.

Как можно надеяться, будущие исследования покажут, что разность, обусловливающая изменение p, в действительности представляет собой не разницу в потоках,

а различие в товарных массах, так как спрос и предложение в результате ограничения и учета будущих и настоящих потребностей, а также благодаря приему заказов на будущие поставки вследствие предполагаемых изменений в уровне цен превращаются в абсолютные массы товаров, не относящиеся к определенному моменту времени. Если это так, то и множитель C_p в приведенной выше формуле следовало бы заменить множителем T_p, который в этом случае снова будет иметь размерность времени.

Если уровень цен задан, то нетрудно представить механизм регулирования производства. Здесь мы снова можем, как это сделал Бёги, воспользоваться диаграммой предельных затрат, которая указывает нам объем производства, который еще может считаться рентабельным, $\mathfrak{P}''$, в функции цены p:

$$\mathfrak{P}''=f(p).$$

Далее мы можем предположить, что предприниматели реагируют на подобное изменение ситуации с известным запаздыванием во времени, продолжительность которого будет неодинаковой для различных предпринимателей. Поэтому реакцию всей группы предпринимателей лучше всего можно представить некоторой функцией с временем запаздывания и временем нарастания, как показано в схеме потоков информации в средней части фиг. 10.

Решения предпринимателей непосредственно определяют доходы отдельных факторов производства E_f. Разделив их на почасовую заработную плату l, получим число отработанных часов A_n. Умножив его на часовую выработку π, найдем фактический объем производства $\mathfrak{P}'$, из которого, снова с некоторым запаздыванием, на рынок в качестве «предложения» течет произведенная масса товаров $\mathfrak{P}$.

Единственный параметр в этой модели, который до сих пор еще не выведен как зависимая переменная, представлен почасовой заработной платой l. Но здесь мы снова можем сделать такое же предположение, как и для ставки процента и уровня цен, а именно что раз-

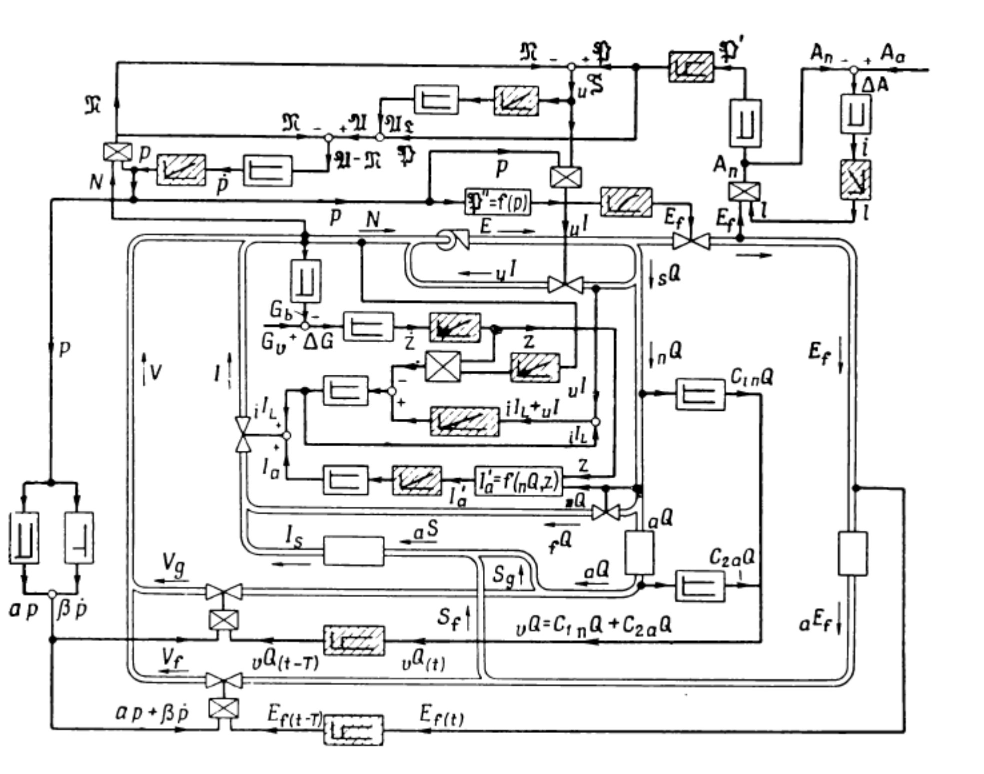
ность между предложением рабочей силы A_a и спросом на нее A_n вызывает во времени постепенное падение почасовой платы l. Соответствующее уравнение имеет вид

$$A_a - A_n = -T_l \dot{l},$$

так что величину l можно вычислить путем интегрирования. Эта гипотеза относительно формирования уровня заработной платы отражена на схеме потоков информации, помещенной в нижней части фиг. 10.

Теперь мы подготовили все необходимые элементы для нашей обобщенной модели, которые можно включить в обобщенную циркуляционную схему. Это и сделано на фиг. 11. Система трубопроводов, довольно явственно проступающая на этой фигуре из паутины линий, представляющих схему потоков информации, имеет несколько иной вид, чем на нашей первоначальной простой схеме. Отчасти это объясняется тем, что мы рассматривали расходы на потребление и образование сбережений соответственно как доходы факторов производства и предпринимательскую прибыль. Частично же это связано с тем, что от предпринимательской прибыли мы прежде всего отделили незапланированные капиталовложения на создание запасов $_uI$ (как это было сделано на фиг. 8). Кроме того, мы выделили из предпринимательской прибыли еще поток $_fQ$, представляющий средства, вновь вложенные самими предпринимателями, т. е. так называемые «самофинансируемые вложения», которые не достаются акционерам в качестве дивидендов. Оставшаяся часть $_aQ$ предпринимательской прибыли, следовательно, олицетворяет собой дивиденды и другие части прибыли, предназначенные для выплаты акционерам или владельцам паев. Как указано включенным в схему трубопроводов резервуаром, они, возможно, могут быть выплачены только в какой-то более отдаленный момент времени.

Расходы на потребление из состава доходов факторов производства (V_f) и из выплаченных прибылей (V_g) регулируются описанным выше способом. Сбережения (S_f) и (S_g) не регулируются, а просто получаются в остатке как неизрасходованная доля доходов. Общая сумма



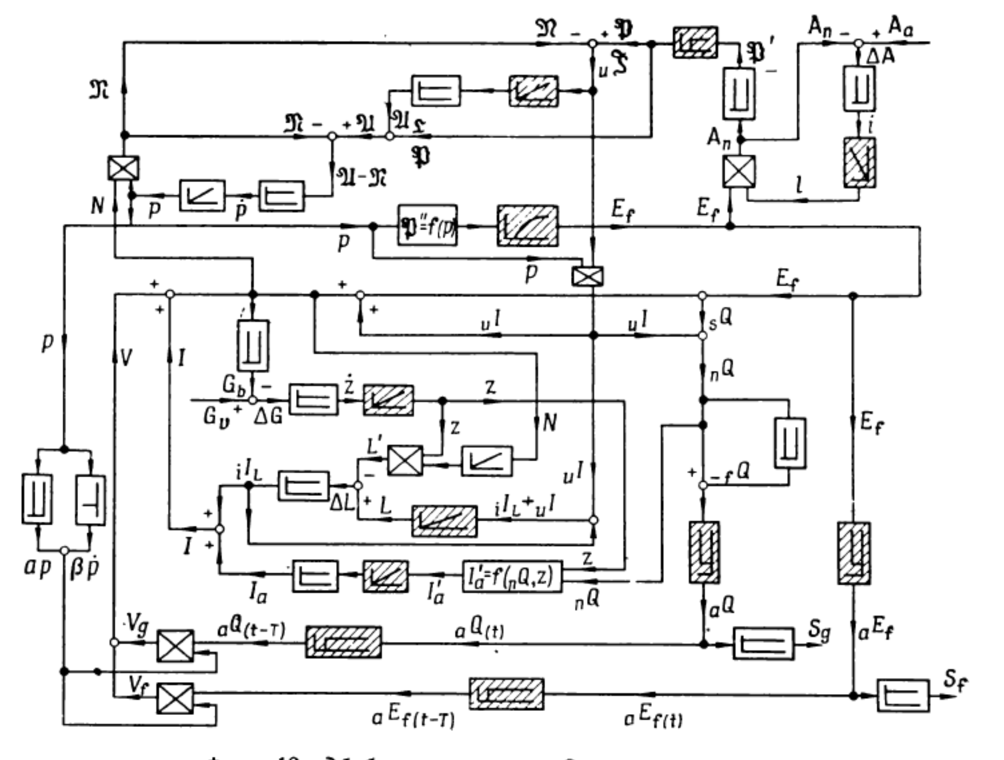
Фиг. 11. Обобщенная модель. Циркуляционная схема.

сбережений не обязательно должна соответствовать разности между общими запланированными капиталовложениями и самофинансируемыми капиталовложениями предприятий. Они притекают к другому резервуару, из которого изымаются в размерах, определяемых плановыми капиталовложениями.

Отклонение сбережений от капиталовложений возможно, и это не противоречит формуле Кейнса $I = S$, так как в нашем случае ${}_aS = S_f + S_g$ представляет собой только сбережения из выплаченного дохода, а не полную сумму сбережений. Полные сбережения, охватывающие также и самофинансируемые капиталовложения и нераспределенные прибыли, накапливающиеся у предприятий, по определению, всегда тождественны с общими капиталовложениями, которые в свою очередь содержат незапланированные вложения на образование запасов.

На фиг. 11 все же довольно отчетливо выражено то обстоятельство, что формирование процента и определение вложений в основной капитал и создание запасов в совокупности образуют полную систему управления капиталовложениями, в то время как ценообразование, определение объема производства и формирование заработной платы образуют вторую систему управления, регулирующую производство в целом. Отсюда видно, что сочетание схемы потока информации и циркуляционной схемы в виде системы трубопроводов даже в случае сложной модели позволяет представить экономический процесс достаточно ясно и понятно.

Этого в той же мере уже нельзя сказать относительно собственно схемы потоков информации нашей обобщенной модели, воспроизведенной на фиг. 12. Зато эта вторая форма представления отчетливо показывает, что вся система в целом имеет уже всего лишь две входные величины, а именно предложение рабочей силы и наличную массу денег, в то время как все другие величины можно вывести из этой системы как зависимые переменные. Это доказывает, что наша обобщенная модель достаточно хорошо определена приведенными уравнениями.



Фиг. 12. Обобщенная модель. Структурная схема.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Я сделал попытку на основании критического обзора и дополнения разнообразных гипотез авторов прежних моделей набросать обобщенную модель, содержащую, как мне кажется, все существенные зависимости экономических величин. Вполне возможно, что название «обобщенная модель» для полученного мною результата еще не совсем оправдано, так как в ней общая масса денег считается неизменной. Однако в модель легко включить стихийное изменение массы денег. В то же время строгое представление дисконтной политики банков вызвало бы значительно большие трудности.

Наконец, я позволю себе сделать еще одно замечание относительно пользы таких моделей и математического описания их поведения.

Различные упомянутые мною авторы экономических моделей пытались путем подстановки конкретных чисел в полученные ими формулы вычислить частоту колебаний соответствующих моделей. Нельзя не улыбнуться, когда читаешь, что им при этом без труда удается получить период продолжительностью от 8 до 10 лет, что наводит на мысль, что цикл конъюнктурных колебаний однозначно объясняется выбранными ими гипотезами, хотя эти гипотезы, как мы видели, сами весьма несовершенны.

Стремление теоретиков и практиков объяснить фактический ход экономического развития за некоторый прошедший период времени и сделать прогнозы относительно будущего развития вполне понятно; однако оно, по-моему, проходит мимо существа подлежащей разрешению задачи. Ни одному инженеру и в голову не могло бы прийти попытаться, исходя из теории, объяснить, например, записанный регистрирующим устройством фактический ход изменения отверстия вентиля у регулятора давления пара, или тем более пытаться делать отсюда прогнозы на будущее. Инженер знает, что регистратор показывает изменения нагрузки, возникающие в результате подключения или отключения от паросиловой

установки всевозможных потребителей. Его не интересует, был ли регулятор такого-то числа в 12 часов дня открыт полностью или только наполовину. Интерес для него представляет лишь вопрос о том, в состоянии ли регулятор устойчиво или с достаточно быстро затухающими колебаниями следовать за изменением нагрузки.

Подобно этому и при исследовании народнохозяйственных процессов регулирования на первом плане должен был бы стоять вопрос об их устойчивости и о факторах, при помощи которых она может быть улучшена. Если нам удастся при помощи организационных мероприятий, которые в экономической области соответствовали бы конструктивным мерам, принимаемым инженерами при решении технических задач, создать свободные от колебаний или сильно демпфированные переходные процессы при ступенчатых изменениях задаваемых извне параметров, то не будет более ни неоправданного бума, ни депрессий. Сделать прогноз экономического развития тогда не составит труда, но он не будет представлять и никакого интереса. Я убежден, что такие организационные мероприятия возможны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Geyer H., Einfache Modelle volkswirtschaftlicher Regelkreise; русский перевод см.: Гейер Г., «Простые модели макроэкономики как системы автоматического регулирования», настоящий сборник, стр. 39.
2. Keynes J. M., The General Theory of Employment, Interest and Money, London, 1936; русский перевод см.: Кейнс Д. М., Общая теория занятости, процента и денег, Издательство иностранной литературы, 1948.
3. Föhl C., Geldschöpfung und Wirtschaftskreislauf, München und Leipzig, 1937.
4. Frisch R., "Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics", Economic Essays in Honour of Cassel, 1933.
5. Kalecki M., "A Macrodynamic Theory of Business Cycles", *Econometrica*, 1935; Essays in the Theory of Economic Fluctuations, 1939; Studies in Economic Dynamics, Allen a. Unwin, 1943.

6. L u n d b e r g, Studies in the Theory of Economic Expansion, 1937.
7. H a n s e n A., Fiscal Policy and Business Cycles, 1941.
8. S a m u e l s o n P. A., "Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration", Readings in Business Cycle Theory, 1944 (первоначально опубликовано в журнале *Rev. Econ. Statistics,* 1939); "A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier", *J. Polit. Econ.,* 1939; "Dynamic Process Analysis", A Survey of Contemporary Economics, 1948.
9. B ö h l H., „Die Konkurrenz im Modell der dynamischen Wirtschaft", Konkurrenz und Planwirtschaft, 1946.
10. M e t z l e r, "Three Lags in the Circular Flow of Income", Essays in Honour of Hansen, 1948.
11. S m i t h O. and E r d l e y H., "An Electronic Analogue for an Economic System", *Electric. Eng.,* **71,** № 4 (1952); русский перевод см.: С м и т О., Э р д л и X., «Электронная модель-аналог экономической системы», настоящий сборник, стр. 255.
12. T i n b e r g e n, P o l a k, The Dynamics of Business Cycles. A Study in Economic Fluctuations, 1950.
13. H i c k s J. R., A Contribution to the Theory of the Trade Cycle, 1950.
14. G o o d w i n R. M., "The Non-Linear Accelerator and the Persistance of Business Cycles", *Econometrica,* **19,** № 1 (1951).
15. T i s c h n e r H., "Die quantitative Darstellung der Vorgänge in Regelkreisen der Volkswirtschaft"; русский перевод см.: Т и ш н е р Г., «Количественное представление процессов регулирования в экономических системах», настоящий сборник, стр. 122.
16. T u s t i n A., "The Mechanism of Economic Systems", London, 1953.
17. H e r z o g R., "Wirtschaftliches Gleichgewicht, Akzelerationseffekt und Finanzpolitik", Beiträge zur Geld- und Finanztheorie, Wilhelm Gerloff zum siebzigsten Geburtstag.

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ [1])

Г. ТИШНЕР

(Тюбинген)

Теоретическое рассмотрение технических систем регулирования проводится в настоящее время на совершенно общей основе благодаря разработанным за последние годы новым математическим методам. Если раньше ограничивались исследованием некоторой заданной системы регулирования путем составления и решения соответствующих ей дифференциальных или разностных уравнений, то теперь благодаря введению *переходных функций,* характеризующих отдельные звенья системы регулирования, описание процессов в этой системе, эквивалентное описанию с помощью дифференциальных или разностных уравнений, достигается при помощи интегрального уравнения. Это интегральное уравнение типа Вольтерра́, непосредственно содержащее переходные функции, при заданной заранее структурной схеме системы составить проще, чем соответствующие ему дифференциальные или разностные уравнения. Решение этого уравнения целесообразнее всего проводить с помощью особого функционального преобразования, так называемого *преобразования Лапласа.* С помощью преобразования Лапласа задача приводится к такой математической форме, которая более доступна наглядному представлению, чем запись с помощью интегралов или производных. Вычислительные операции в этом случае также упрощаются.

---

[1]) Tischner H., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge», стр. 76—85.

Для количественного описания экономических систем регулирования необходимо, так же как и в технических системах регулирования, сначала составить блок-схему системы. После того как для каждого элемента системы определены его характеристики (лучше всего в виде его переходных функций), становится возможным количественное описание системы.

Ниже кратко изложены некоторые свойства преобразования Лапласа, необходимые для понимания статьи. Далее будет исследована устойчивость одной простой экономической системы регулирования.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА [1—5]

Некоторый, зависящий от времени t процесс $h(t)$ в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \infty$ можно представить с помощью интеграла Фурье

$$f(j\omega) = \int_0^\infty h(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1а}$$

в виде непрерывного спектра $f(j\omega)$ угловой частоты ω. Так как по формуле Эйлера

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t, \tag{1б}$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, то спектр содержит как синусоидальные, так и сдвинутые на $\pi/2$ косинусоидальные составляющие. Функциональное преобразование (1а) устанавливает соответствие между спектром $f(j\omega)$ и временно́й функцией $h(t)$.

Если вместо мнимой угловой частоты ввести более широкое понятие «комплексной частоты»

$$s = \beta + j\omega, \tag{2а}$$

которая, помимо угловой частоты ω, содержит еще и действительную часть β, то можно определить комплексный спектр

$$f(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt. \tag{2б}$$

Следовательно, функция $h(t)$ умножается на выражение

$$e^{-st} = e^{-\beta t} (\cos \omega t - j \sin \omega t), \quad (2в)$$

описывающее затухающие колебания, и интегрируется в пределах $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Чтобы уравнять размерности спектра $f(s)$ и временно́й функции $h(t)$, нужно правую часть уравнения (2б) умножить на s. Тогда получаем

$$f(s) = s \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt. \quad (2г)$$

Эта зависимость называется преобразованием Лапласа [1]).

Обратное преобразование Лапласа имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{f(s)}{s} e^{st} ds. \quad (2д)$$

Введение комплексной частоты s позволяет использовать теорию функций комплексного переменного, основные положения которой, особенно в виде формулы разложения Хэвисайда, весьма упрощают вычисление интеграла (2д).

Преимущества, которые дает преобразование Лапласа, становятся очевидными, когда рассматривается система регулирования, состоящая из цепи последовательно соединенных звеньев. Если ко входу первого звена приложена временна́я функция $h(t)$, то, согласно уравнению (2г), ей соответствует изображение («спектр») $f(s)$, что можно записать в виде соответствия

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet f(s). \quad (3а)$$

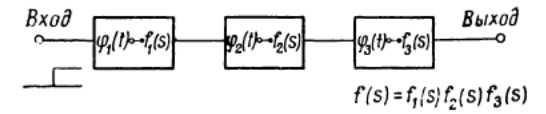
(Знак $\circ\!\!-\!\!\bullet$ здесь просто означает сокращенную запись преобразования Лапласа.)

В общем случае процесс $h(t)$ искажается звеньями цепи. При подаче на вход ступенчатого воздействия («скачка») со спектром 1 на выходе первого звена цепи

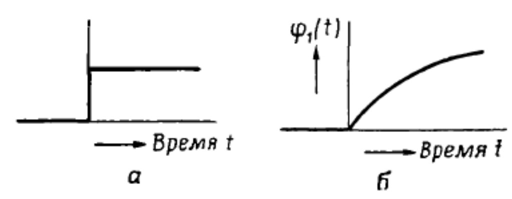
---

[1]) Часто требованием равенства размерностей пренебрегают и определяют преобразование Лапласа уравнением (2б) без множителя s (см. [3]).

(фиг. 1) образуется функция $\varphi_1(t)$ (фиг. 2), изображение которой $f_1(s)$ определяется по уравнению (2г). Функция $\varphi_1(t)$, характеризующая поведение звена при



Фиг. 1. Результирующая переходная функция цепи из нескольких последовательных элементов.



Фиг. 2. Переходная функция.

а — ступенчатая функция («скачок»); *б* — переходная функция.

подаче на его вход скачка, называется *переходной функцией*. Если цепь состоит из нескольких звеньев с переходными функциями $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ или *передаточными функциями* $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$, то результирующий спектр переходной функции на выходе цепи равен

$$f(s) = f_1(s) f_2(s) f_3(s). \tag{3б}$$

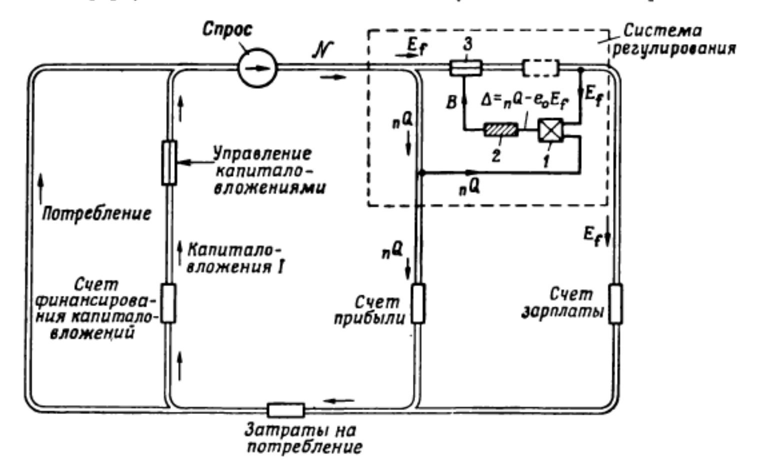
При использовании временны́х функций это дало бы весьма запутанное интегральное выражение. Следовательно, преобразование временны́х функций в передаточные функции (спектры) с помощью преобразования Лапласа дает существенное упрощение математических выражений. Временна́я функция, соответствующая изображению $f(s)$, находится по уравнению (2д).

В нашем изложении мы предполагаем, что отдельные звенья цепи регулирования *линейны*. Это означает, что увеличение входной величины, например, вдвое вызывает в каждый момент времени соответствующее удвоение выходной величины. На линейность связей следует

обращать особое внимание при исследовании экономических систем регулирования, и она всегда требует специального исследования. При небольших изменениях величин мы в общем случае можем с достаточной точностью считать условия линейности выполненными. Все последующие соображения также относятся только к линейным системам. Теория нелинейных систем регулирования значительно сложнее и в настоящее время еще находится в стадии разработки.

2. РАССМОТРЕНИЕ ПРОСТОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

На фиг. 3 воспроизведена заимствованная из работы Фёля [6][1]) модель денежного обращения, содержащая



Фиг. 3. Модель денежного обращения.

цепь регулирования. Система регулирования представлена звеньями, расположенными внутри пунктирного прямоугольника. Спрос N, измеряемый в денежных еди-

[1]) См. стр. 83 данной книги, особенно фиг. 8 на стр. 104.

ницах в год, подразделяется на доход факторов производства E_f и прибыль $_nQ$. Через бюро найма *3*, которое соответствует в технической системе регулирования регулирующему органу, течет поток денег E_f. Этот поток управляется предпринимателем *2*, выполняющим роль регулятора. Доход факторов производства E_f равен спросу предпринимателя на рабочую силу B (регулирующее воздействие)[1]). Поэтому

$$E_f(t) = B(t). \tag{4a}$$

Подлежащая регулированию система, или объект регулирования, в данном случае отсутствует, т. е. обведенные пунктиром звенья в действительности не существуют. Поток проходит без искажений через объект регулирования с переходной функцией 1 и попадает в бюро заработной платы, находящееся за пределами системы регулирования. Бюро *1*, распределяющее прибыли, измеряет доход факторов производства E_f и сравнивает его с полученной прибылью $_nQ$. Для предпринимателя *2*, выполняющего функции регулятора, решающее значение имеет разность $\Delta = {}_nQ - e_0E_f$. Предприниматель дает свои указания в бюро найма *3* в виде предложений по изменению численности рабочей силы B. В данной системе регулирования величина выпуска продукции регулируется прибылью. Величина e_0 является некоторой постоянной и, по данным Фёля, равна примерно 0,5.

Все звенья системы регулирования, за исключением предпринимателя, можно с достаточной точностью считать неискажающими. Если подать на вход такого звена скачок, то на его выходе снова образуется скачок без запаздывания. Предпринимателю же для принятия решения требуется некоторое время запаздывания T_t (фиг. 4). Кроме того, он не сразу предоставит всю разность $\Delta = {}_nQ - e_0E_f$ в бюро найма для изменения численности рабочей силы B, а будет делать это постепенно.

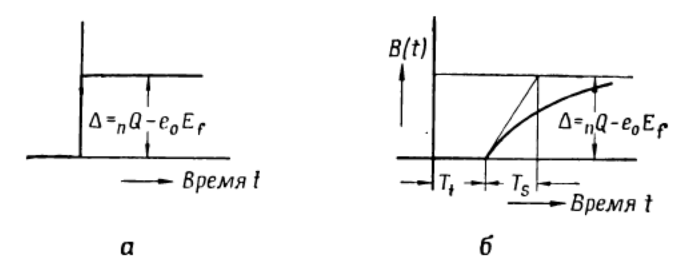
---

[1]) У автора везде речь идет о спросе предпринимателя на рабочую силу. Это неточно, так как в оптимальной системе регулирования $E_f(t) = {}_nQ$. — *Прим. ред.*

Поэтому для описания действий предпринимателя представляется разумным принять возрастающую экспоненциальную функцию с постоянной времени (временем нарастания) T_s:

$$\varphi(t) = 1 - e^{-(t-T_t)/T_s} \qquad (T_t \leqslant t \leqslant \infty). \tag{4б}$$

Постоянная времени T_s определяется как расстояние между точкой $t = T_t$ и проекцией на ось t точки пересечения касательной к экспоненте в точке $t = T_t$ с асимптотой переходной функции при $t = \infty$. Таким образом,



Фиг. 4. Переходная функция предпринимателя.

а — ступенчатая функция; *б* — экспоненциальная функция с временем запаздывания T_t и постоянной времени T_s.

при скачкообразном изменении разности Δ переходная характеристика предпринимателя имеет вид

$$B(t) = \Delta \cdot \varphi(t). \tag{4в}$$

При произвольном изменении величины

$$\Delta(t) = {}_nQ(t) - e_0 E_f(t) \tag{4г}$$

спрос на рабочую силу $B(t)$, а следовательно, и дохсд факторов производства E_f определяется по теореме свертки [1]) выражением

$$E_f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \Delta(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau, \tag{4д}$$

[1]) См. [4], стр. 55.

или в окончательном виде

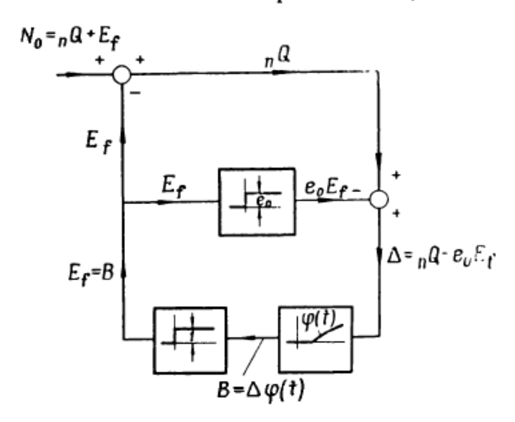
$$E_f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t {}_nQ(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau -$$

$$- e_0 \frac{d}{dt} \int_0^t E_f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau. \quad (4e)$$

Согласно фиг. 3, спрос N подразделяется на E_f и ${}_nQ$:

$$N = {}_nQ + E_f. \quad (5a)$$

При последующем исследовании устойчивости мы можем спрос принять постоянным и равным N_0.



Фиг. 5. Структурная схема системы регулирования, изображенной на фиг. 3.

На фиг. 5 система регулирования, очерченная на фиг. 3 пунктиром, представлена в виде структурной схемы в той форме, которая предложена Оппельтом [7] для изображения блок-схем. Эта схема позволяет непосредственно определить необходимые и достаточные соотношения, описывающие поведение системы регулирования.

Заменяя в уравнении (4е) прибыль ${}_nQ$ спросом, получим

$$E_f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t N(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau -$$

$$-(1+e_0)\frac{d}{dt}\int_0^t E_f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau. \quad (5б)$$

Так как $N(t) = N_0$, то первый интеграл равен $N_0\varphi(t)$. Таким образом, окончательно имеем

$$E_f(t) = N_0\varphi(t) - (1+e_0)\frac{d}{dt}\int_0^t E_f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau. \quad (5в)$$

Из этого уравнения необходимо определить доход факторов производства E_f. Поскольку интеграл имеет переменный верхний предел, это уравнение является интегральным уравнением типа Вольтерра́. Интегралы этого типа введены в теорию регулирования Кюпфмюллером [8]. Он ввел также понятие переходной функции для характеристики электрического четырехполюсника.

Найдем решение этого уравнения с помощью преобразования Лапласа. При помощи соответствий

$$E_g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \bar{E}_f(s), \quad (5г)$$

$$\varphi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, g(s), \quad (5д)$$

получаем

$$\bar{E}_f(s) = N_0 g(s) - (1+e_0)\bar{E}_f(s)g(s), \quad (6а)$$

или

$$\bar{E}_f(s) = N_0\frac{g(s)}{1+(1+e_0)g(s)}. \quad (6б)$$

Интеграл типа свертки в уравнении (5в) после преобразования представляется в виде произведения $\bar{E}_f(s)\cdot g(s)$. Здесь непосредственно выступает преимущество применения преобразования Лапласа для решения уравнения (5в).

По уравнению (6б) можно вычислить $\overline{E}_f(s)$, а воспользовавшись уравнением (2д), — определить и $E_f(t)$.

Важнейшим вопросом всех задач регулирования является вопрос *устойчивости*. Для ответа на этот вопрос в данном случае достаточно исследовать частотную характеристику относительно переменной s. Если все без исключения корни уравнения

$$1+(1+e_0)\,g(s)=0 \tag{6в}$$

имеют отрицательные действительные части, то система регулирования является устойчивой, т. е. колебания, возникшие в системе, затухают. Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то амплитуда колебаний дохода факторов производства E_f с течением времени возрастает и система оказывается неустойчивой. Граничным случаем между устойчивым и неустойчивым состояниями является случай равенства нулю действительной части одного из корней.

Передаточная функция $g(s)$ является спектром переходной функции $B(t)$ предпринимателя [уравнения (5д) и (4в)]. В явном виде уравнение для $g(s)$ записывается в форме [1])

$$g(s)=\frac{e^{-sT_t}}{1+sT_s}. \tag{7а}$$

Подставляя $g(s)$ в (6в), получим

$$1+(1+e_0)\frac{e^{-sT_t}}{1+sT_s}=0. \tag{7б}$$

Согласно уравнению (2а), корни s_ν этого уравнения содержат действительную (β_ν) и мнимую ($j\omega_\nu$) части. Подставив эти значения в уравнение (7б) и положив $e_0=0{,}5$ в соответствии с принятым ранее предположением, получим

$$e^{-\beta_\nu T_t}e^{-j\omega_\nu T_t}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\beta_\nu T_s-\frac{2}{3}j\omega_\nu T_s, \tag{7в}$$

---

1) См. [4], стр. 52 и 439.

или, применяя формулу Эйлера,

$$e^{-\beta_\nu T_t}(\cos\omega_\nu T_t - j\sin\omega_\nu T_t) = -\frac{2}{3}(1+\beta_\nu T_s) - \frac{2}{3}j\omega_\nu T_s. \quad (7г)$$

Действительная часть этого уравнения равна

$$e^{-\beta_\nu T_t}\cos\omega_\nu T_t = -\frac{2}{3}(1+\beta_\nu T_s), \quad (7д)$$

а мнимая часть

$$e^{-\beta_\nu T_t}\sin\omega_\nu T_t = \frac{2}{3}\omega_\nu T_s. \quad (7е)$$

Вводя отношение α времени запаздывания T_t к постоянной времени T_s

$$\alpha = \frac{T_t}{T_s}, \quad (8а)$$

получаем соответственно

$$e^{-\beta_\nu T_t}\cos\omega_\nu T_t = -\frac{2}{3}\left(1+\frac{\beta_\nu}{\alpha}T_t\right) \quad (8б)$$

и

$$e^{-\beta_\nu T_t}\sin\omega_\nu T_t = \frac{2}{3}\frac{\omega_\nu T_t}{\alpha}. \quad (8в)$$

Прологарифмируем теперь уравнение (8в):

$$\beta_\nu T_t = -\ln\frac{2}{3\alpha} - \ln\frac{\omega_\nu T_t}{\sin\omega_\nu T_t}. \quad (8г)$$

Если подставить выражения (8в) и (8г) в уравнение (8б), то после небольших преобразований получим

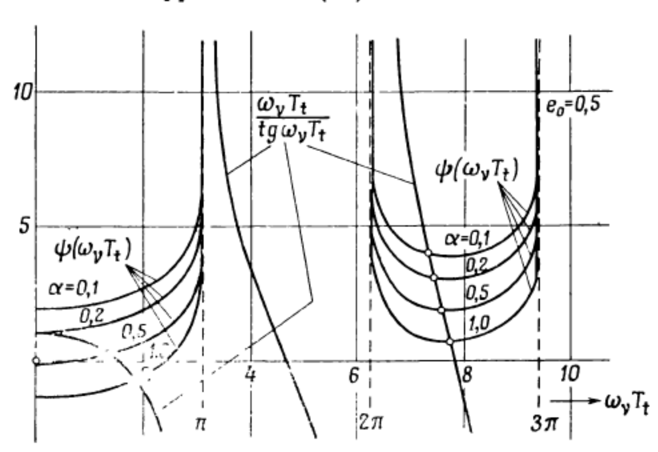
$$\frac{\omega_\nu T_t}{\operatorname{tg}\omega_\nu T_t} = \ln\frac{2}{3\alpha} - \alpha + \ln\frac{\omega_\nu T_t}{\sin\omega_\nu T_t}. \quad (8д)$$

Это уравнение содержит только неизвестное ω_ν. Коэффициент демпфирования β_ν определяется из уравнения (8г). Уравнения (8г) и (8д) являются трансцендентными уравнениями. Они всегда встречаются в этом или подобном виде в тех случаях, когда в переходную функцию вводится время запаздывания. Эти уравнения проще всего решать графическим методом.

На фиг. 6 изображено изменение функции $\omega_\nu T_t/\operatorname{tg}\omega_\nu T_t$ в зависимости от $\omega_\nu T_t$, а также изменение функции

$$\psi(\omega_\nu T_t) = \ln\frac{2}{3\alpha} - \alpha + \ln\frac{\omega_\nu T_t}{\sin\omega_\nu T_t} \qquad (8е)$$

для различных значений α. Точки пересечения кривых обеих функций определяют корни $\omega_\nu T_t$. Корни $\beta_\nu T_t$ определяются по уравнению (8г).



Фиг. 6. Решения основного уравнения.

Таким образом, мы получаем бесчисленное множество корней, являющихся решениями наших уравнений. Поскольку с возрастанием порядкового номера ν коэффициент демпфирования β_ν увеличивается, то практически имеют значение только корни $\omega_1 T_t$ и $\beta_1 T_t$. В табл. 1 представлены первые две пары корней $\omega_1 T_t$, $\beta_1 T_t$ и $\omega_2 T_t$, $\beta_2 T_t$. При $\alpha \leqslant 0{,}2$ имеются колебания только высших порядков ($\nu > 1$), которые быстро затухают. По существу получается затухающая экспоненциальная функция. При больших значениях отношения времени запаздывания к постоянной времени невозможно избежать колебаний дохода факторов производства. Кроме того, они затухают медленнее. Следовательно, мы получаем некоторую количественную оценку того факта, что предприятие

Таблица 1

α	$\omega_1 T_t$	$-\beta_1 T_t$	$\omega_2 T_t$	$-\beta_2 T_t$
0,1	—	1,91	7,40	4,01
0,2	—	1,20	7,48	3,29
0,5	1,45	0,67	7,60	2,35
1,0	1,90	0,29	7,78	1,65

работает тем стабильнее, чем меньше α, т. е. чем быстрее предприниматель принимает решения. Если $\alpha = 1$ (время запаздывания равно постоянной времени) и $T_t = 0,1$ года, т. е. практически равно одному месяцу, то частота колебаний будет равна $\omega_1/2\pi = 3,03$ колебания в год. Полученное решение соответствует значению $e_0 = 0,5$ [см. уравнение (4г)].

Таблица 2

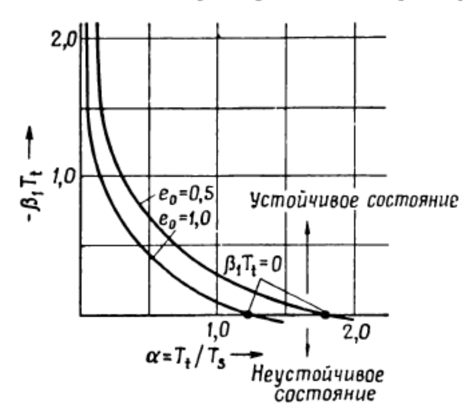
α	$\omega_1 T_t$	$-\beta_1 T_t$	$\omega_2 T_t$	$-\beta_2 T_t$
0,1	—	1,10	7,35	3,74
0,2	0,80	0,85	7,50	3,00
0,5	1,57	0,45	7,65	2,06
1,0	2,05	0,10	7,80	1,36

Результаты решения при $e_0 = 1$ приведены в табл. 2. Сравнение с результатами, приведенными в табл. 1, показывает, что при $e_0 = 0,5$ демпфирование больше, а собственная частота несколько меньше. Однако разница не очень велика. В области $0,5 \leqslant e_0 \leqslant 1$ влияние коэффициента e_0 не очень существенно.

На фиг. 7 изображена зависимость $\beta_1 T_t$ от α для $e_0 = 0,5$ и $e_0 = 1,0$. При $\alpha = 1,85$ и 1,23 коэффициент демпфирования обращается в нуль. При больших значениях α система регулирования неустойчива; способность

предпринимателя принимать решения становится слишком малой.

Из приведенного исследования вытекает, что при наличии определенной функции, характеризующей действия руководителя предприятия, можно получить количественную оценку процессов в экономической системе регулирования. В частности, можно получить численную оценку степени устойчивости предприятия. Предприниматель,



Фиг. 7. Устойчивость предприятия.

работающий с малым временем запаздывания и большой постоянной времени, никогда не может вызвать (в общем нежелательные) колебания E_f. Таким образом, проведенное решение дает указание, которое может быть выражено в численном виде, о выгодном методе работы предприятия.

Эти соображения были продемонстрированы на сравнительно простой модели. Однако методы переходных функций и преобразования Лапласа применимы также и к сложным системам регулирования. В данном случае наша задача состояла в том, чтобы пояснить методику, которая с успехом используется в технике, а в последнее время также и в биологии и которая, по-видимому, удобна и для исследования экономических систем регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doetsch G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.
2. Doetsch G., Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch, Berlin, 1947.
3. Doetsch G., Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, München, 1956; русский перевод см.: Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, 1960.
4. Wagner K. W., Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, 2. Aufl., Leipzig, 1950.
5 Oldenbourg R. C., Sartorius H., Dynamik selbsttätiger Regelungen, München u. Berlin, 1944; русский перевод см.: Ольденбург Р., Сарториус Г., Динамика автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1949
6. Föhl C., Volkswirtschaftliche Regelkreise höherer Ordnung in Modelldrastellung; русский перевод см.: Фёль К., «Модели экономических систем регулирования более высоких порядков», настоящий сборник, стр. 83.
7. Oppelt W., Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, Weinheim, 1956; русский перевод см.: Оппельт В., Основы техники автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1960.
8. Küpfmüller K., *Elektr. Nachrichtentechn.*, № 5, 459 (1928); ср. также *Arch. d. Elektr. Ubertr.*, № 7, 71 (1953).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО МАТЕРИАЛАМ НАБЛЮДЕНИЙ[1])

Р. ХЕНН

(Гейдельберг)

Задача получения характеристик равносильна задаче создания реальной экономической модели [14]. Что подразумевается под реальной моделью? Имеется некоторая область экономики, в которой нужно рассмотреть изменение определенных величин, например конечного продукта, капиталовложений, потребления. Между этими величинами существуют зависимости, и мы хотим представить их в виде некоторых аналитических выражений. В зависимости от метода исследования эти выражения могут иметь различную форму. При статическом методе исследования стараются составить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

связывающих искомые экономические величины. Далее стараются разрешить такую систему уравнений относительно определенных экономических величин, т. е. выразить $n-m$ величин $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ в виде функ-

---

[1] Henn R., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge», стр. 86—97.

ций величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\left.\begin{aligned} x_{m+1} &= g_1(x_1, \ldots, x_m), \\ x_{m+2} &= g_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= g_{n-m}(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

таким образом, чтобы система уравнений (1) тождественно удовлетворялась при подстановке в нее выражений (2).

При динамических исследованиях [2, 3, 9, 13] необходимо иметь в виду, что экономические величины зависят от времени, так что приходится иметь дело с функциями

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(t), \\ x_2 &= f_2(t), \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(t). \end{aligned}\right\}$$

В этом случае задают зависимости

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(f_1, f_2, \ldots, f_n) &= 0, \\ \Phi_2(f_1, f_2, \ldots, f_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(f_1, f_2, \ldots, f_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

между функциями $f_1, f_2, \ldots, f_n$, где под $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ подразумеваются некоторые функциональные операторы. Например, операторы Φ_i могут состоять из разностных, дифференциальных и интегральных операторов. Часто система (3) представляет собой систему дифференциальных уравнений, скажем систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(D) f_j = b_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где оператор D означает дифференцирование по t, а функции $p_{ij}(z)$ являются полиномами. В данном случае также стараются определить $n - m$ функций f_i, если

остальные известны. Чтобы найти законы, которым подчиняются экономические величины, иначе говоря, установить зависимости вида (1) или (3), необходимо обобщить опытные данные, как это принято делать в физике. Так же, как и в физике, коэффициенты в уравнениях определяются опытным путем.

Ниже будет показан метод описания экономических закономерностей в форме уравнений на основании наличных данных. Система уравнений (1) будет преимущественно составляться сразу в форме (2). Иногда составление системы уравнений в форме (2) облегчается тем, что величины, обозначенные в системе (2) через x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n, наиболее удобным образом выбирают из n рассматриваемых экономических величин независимо от того, какие экономические величины необходимо определить в действительности. После этого полученная система (2) разрешается относительно требуемых величин. Так как уравнения (2) однотипны, достаточно рассмотреть способ получения какого-либо одного уравнения.

Будем исходить из того, что наблюдалось s систем значений $n+1$ экономических величин. Обозначим систему значений i-го наблюдения через $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}, y_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, s$. Для сокращенной системы значений $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$ введем обозначение $\mathbf{x}_i$.

Мы ищем аналитическое выражение, которое описывает, каким образом величина y зависит от величин x_1, x_2, ..., x_n. Иначе говоря, отыскивается подходящая функция g от n переменных x_1, x^2, ..., x_n. Само собой разумеется, что имеется бесчисленное множество функций, которые при значениях $\mathbf{x}_i$ в точности представляют значения функций y_i. Таким образом, тип функции можно выбирать до некоторой степени произвольно. Чаще всего из n переменных выбирают произвольно r функций g_1, g_2, ..., g_r, а затем ищут g как линейную комбинацию вида

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{r} a_k g_k(\mathbf{x}), \tag{4}$$

где $\mathbf{x}$ означает набор величин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Задача состоит в подходящем выборе коэффициентов a_k

руководствуясь соображениями, которые еще подлежат уточнению. Действуя таким образом, мы придем к системе линейных уравнений для определения a_k.

Если бы мы считали функцию g зависящей от коэффициентов a_k, то в общем случае получили бы нелинейные уравнения, решение которых потребовало бы значительно больших усилий. Укажем также, что класс возможных функций охватывает функции совершенно различного вида. Приведем лишь несколько простых примеров: полиномы вида $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, полиномы относительно нескольких переменных, тригонометрические полиномы, линейные комбинации экспоненциальных функций и т. д.

Произвол в выборе функций g_i используется для такого выбора этих функций, при котором они как можно точнее описывали бы протекание экономических процессов. Так, например, колебания конъюнктуры можно пытаться описать периодическими функциями, а для учета монотонного характера подъема или спада, выпуклости кривых предложения или спроса и т. д. в качестве g_i выбирают функции, обладающие указанными свойствами.

Число r функций g_i, которые непременно входят в линейную комбинацию, не должно быть слишком большим, во всяком случае, оно не должно превышать числа систем s, полученных в результате наблюдений; в противном случае коэффициенты a_i нельзя будет определить однозначно. Кроме того, с точки зрения применений в экономике неразумно при наличии скудного материала наблюдений описывать имеющиеся зависимости с помощью большого набора функций g.

Если желательно иметь более точное описание какой-либо функциональной зависимости, необходимо обеспечить достаточно обширный материал наблюдений. В области экономики это не всегда просто, так как экономист в отличие от физика не может производить лабораторных исследований.

Кроме того, в экономике между величинами существуют стохастические, а не строгие функциональные за-

висимости. Но если величина y стохастически зависит от величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то между средними значениями этих величин все же существует строгая функциональная связь. Отдельные же величины имеют разброс относительно этого среднего значения. По этой причине нецелесообразно, даже в тех случаях, когда это осуществимо, выбирать функцию g таким образом, чтобы вычисленные величины совпадали с полученными при наблюдении. Скорее тип функции (4) нужно подобрать так, чтобы он соответствовал экономической структуре; внутри выбранного таким путем класса функций затем определяется и сама функция g, т. е. коэффициенты a_k определяются таким образом, чтобы разброс наблюдаемых величин относительно вычисленных был минимальным.

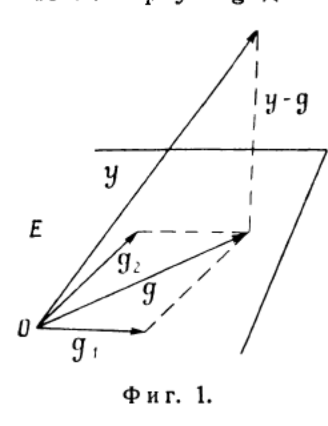
Для этого прежде всего необходимо указать меру разброса. Постараемся вывести такой критерий из геометрических соображений. Примем s значений $h(\mathbf{x}_1)$, $h(\mathbf{x}_2), \ldots, h(\mathbf{x}_s)$ каждой функции $h(\mathbf{x})$ за координаты некоторой точки в s-мерном пространстве R^s. Каждой функции h соответствует своя точка $\mathbf{h}$ в R^s. Полученные из наблюдений значения y_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ также можно принять за координаты некоторой точки $\mathbf{y}$ в R^s. Разброс данных наблюдения относительно вычисленных значений функции g измеряется $1/\sqrt{s}$-й частью геометрического расстояния между соответствующими точками $\mathbf{g}$ и $\mathbf{y}$. По теореме Пифагора это расстояние равно

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{s} [g(\mathbf{x}_i) - y_i]^2}.$$

Так как функция g [illegible]ется линейной комбинацией функций $g_1, g_2, \ldots, g_r$, то точка $\mathbf{g}$ лежит на не более чем r-мерной поверхности E, которая определяется точками $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_r$ и началом координат, причем $\mathbf{g}_k = (g_k(\mathbf{x}_1), g_k(\mathbf{x}_2), \ldots, g_k(\mathbf{x}_s))$.

Задача отыскания функции g как такой линейной комбинации функций g_k, для которых разброс данных наблюдения относительно значений этой функции был бы минимальным, равносильна задаче отыскания на

поверхности E точки $\mathbf{g}$, имеющей кратчайшее расстояние до точки $\mathbf{y}$. Точка $\mathbf{g}$ является основанием перпендикуляра, опущенного из точки $\mathbf{y}$ на E. Если мы перейдем от точек в пространстве R^s к векторам и обозначим эти векторы теми же буквами, что и точки, то обнаружим, что вектор $\mathbf{y}-\mathbf{g}$ должен быть перпендикулярен к поверхности E, т. е., в частности, перпендикулярен ко всем векторам $\mathbf{g}_k$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для вывода условий перпендикулярности («ортогональности») введем скалярное произведение двух векторов $\mathbf{u} = (u_1, u_2 \ldots, u_s)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2 \ldots, v_s)$:

$$< \mathbf{u},\ \mathbf{v} > = \sum_{i=1}^{s} u_i v_i.$$

Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ перпендикулярны друг другу, если

$$< \mathbf{u},\ \mathbf{v} > = 0.$$

В соответствии с этим получаем уравнение

$$< \mathbf{y}-\mathbf{g},\ \mathbf{g}_k > = 0; \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{5}$$

Для вектора $\mathbf{g}$, согласно (4), имеем

$$\mathbf{g} = \sum_{k=1}^{r} a_k \mathbf{g}_k, \tag{6}$$

так как из уравнения (4) для отдельных компонент следует

$$g(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{r} a_k g_k(\mathbf{x}_i); \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Подставив (6) в (5), получим

$$< \mathbf{y} - \sum_{h=1}^{r} a_h \mathbf{g}_h,\ \mathbf{g}_k > 0; \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

или

$$\sum_{h=1}^{r} < \mathbf{g}_h, \mathbf{g}_k > a_h = < \mathbf{y}, \mathbf{g}_k >; \qquad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{7}$$

поскольку справедливы следующие соотношения:

$$< \mathbf{y} - \sum_{h=1}^{r} a_h \mathbf{g}_h, \mathbf{g}_k > = \sum_{i=1}^{s} \left[y_i - \sum_{h=1}^{r} a_h g_h(\mathbf{x}_i) \right] g_k(\mathbf{x}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} y_i g_k(\mathbf{x}_i) - \sum_{h=1}^{r} a_h \sum_{i=1}^{s} g_h(\mathbf{x}_i) g_k(\mathbf{x}_i) =$$

$$= < \mathbf{y}, \mathbf{g}_k > - \sum_{h=1}^{r} a_h < \mathbf{g}_h, \mathbf{g}_k >.$$

Коэффициенты a_k определяются из системы линейных уравнений (7). Уравнения (7) называются нормальными уравнениями. Может случиться, что система (7) имеет не одно, а бесчисленное множество решений. А именно, возможно, что различные линейные комбинации функций g_k изображаются в R^s одной и той же точкой $\mathbf{g}$. Это как раз имеет место тогда, когда существует нетривиальная линейная комбинация

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{r} b_k g_k(\mathbf{x}),$$

исчезающая в точках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s$, которые, таким образом, изображаются в R^s началом координат. В таком случае функция $g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})$ дает такую же удобную апроксимацию опытных величин, как и функция $g(\mathbf{x})$. В тех случаях, когда это имеет место, переходят к такой частичной системе g_k, из которой уже нельзя получить линейной комбинации функций, исчезающих во всех точках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s$. Для такой системы функций система нормальных уравнений решается однозначно, так как в этом случае уравнения линейно независимы.

Система (4) получается особенно простой, когда

$$< \mathbf{g}_h, \mathbf{g}_k > = 0$$

для $h \neq k$, т. е. когда векторы g_h, g_k попарно перпендикулярны. В этом случае уравнение (7) имеет вид

$$< \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k > a_k = < \mathbf{y}, \mathbf{g}_k >; \qquad k = 1, 2, \ldots, r. \qquad (8)$$

Если для всех k величина $< \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k >$ не равна нулю, то уравнения (8) можно однозначно разрешить относительно неизвестных a_k, причем оказывается возможным определить все a_k независимо друг от друга. В этом состоит преимущество, которое дает применение ортогональных функций. Нет нужды с самого начала определять необходимое число функций. Прежде всего выбирают апроксимирующую функцию в виде

$$\sum_{k=1}^{q} a_k g_k(\mathbf{x}), \qquad (9)$$

где $q < r$. Если при этом окажется, что апроксимация опытных величин является слишком неточной, можно попробовать апроксимировать их линейной комбинацией

$$\sum_{k=1}^{r} a_k g_k(\mathbf{x}). \qquad (10)$$

Система нормальных уравнений для определения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_q$ в уравнении (9) состоит как раз из первых q уравнений системы, которая имеется для определения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_r$ уравнения (10). Так как эта система имеет вид (8), то коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_q$ первых q членов уравнения (10) совпадают с коэффициентами уравнения (9). Поэтому не нужно определять их заново.

Из каждой данной системы функций $g_1, g_2, \ldots, g_r$ всегда можно образовать систему $g_1^*, g_2^*, \ldots, g_r^*$ попарно взаимноортогональных функций, так что многообразие линейных комбинаций g_k^* по существу состоит из тех же функций, что и многообразие линейных комбинаций g_k. Подобный метод ортогонализации был предложен Е. Шмидтом [10].

Чтобы получить из системы функций $g_1, g_2, \ldots, g_r$ ортогональную систему, нужно проделать в точности

такой же объем вычислительной работы, как и для решения уравнений (7). Поскольку при вычислении скалярных произведений используются точки $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, ..., s)$ и так как вследствие этого $\mathbf{x}_i$ играют роль и в условиях ортогональности, применение метода ортогонализации оправдывается только тогда, когда необходимо обрабатывать большое количество серий опытных данных для тех же самых значений $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, ..., s)$.

Проиллюстрируем применение описанного метода на простой модели [6]. Модель основана на материалах наблюдений экономического развития ФРГ с 1948 по 1951 г. включительно [4, 5]. Так как эмпирические данные, представленные в народнохозяйственном балансе Федеративной Республики Германии, имеют не такую форму, какая желательна для более точного исследования, мы вынуждены ограничиться моделированием некоторых агрегированных величин [7]. При этом может оказаться, что ввиду такого упрощения важные зависимости останутся нераскрытыми.

Прежде основное затруднение при исследовании хода экономических процессов видели в математической обработке получающихся систем уравнений. Это затруднение устранено развитием современных вычислительных машин, которые позволяют за короткое время решать системы уравнений с большим числом переменных. В настоящее время первоочередным является решение другого вопроса, а именно разработка таких статистических методов сбора сведений, которые позволили бы получить максимально точный материал наблюдений. К сожалению, применяющиеся в настоящее время методы не всегда обеспечивают степень точности, необходимую для использования результатов [8]. Кроме того, имеется немало общих и частных экономических показателей, более или менее точные данные для которых в настоящее время получить вообще невозможно, хотя теория такого рода выборок чрезвычайно интересна. В ФРГ Федеральное статистическое управление работает над разделением народнохозяйственного баланса на 22 отдельные сферы.

Трудностями оценки народнохозяйственных показателей объясняется также и то, что мы при решении исполь-

10 Зак. 2575

зуем вместо нетто-величин брутто-величины и потребление связываем не с имеющимися в распоряжении доходами, а с общей стоимостью услуг и товаров, реализованных в пределах страны. В ФРГ распределение потребления конечного продукта по отдельным статьям дается лишь для валового конечного продукта в рыночных ценах или для общей стоимости реализованных внутри страны товаров и услуг. Эти данные мы используем. Но отсутствуют другие величины, желательные для нашего исследования.

Модель охватывает период с июля 1948 г. по декабрь 1951 г. Эмпирический материал состоит из поквартальных данных. Мы устанавливаем зависимости между следующими величинами:

E — общая стоимость реализованных в ФРГ товаров и услуг в млрд. марок;
P — индекс стоимости жизни (для средней группы потребителей, 1950 г. = 100);
C — частное потребление в млрд. марок;
U — чистый доход независимых лиц и предприятий в млрд. марок;
I — валовые капиталовложения (основные фонды + запасы);
V — потребление государства и общественных организаций в млрд. марок;
E — задается уравнением

$$E = C + I + V \tag{11}$$

и отличается от валового конечного продукта в рыночных ценах на величину сальдо торгового баланса (разность между общей стоимостью экспорта и импорта).

Имеющийся в наличии материал наблюдений представляется пригодным для осуществления линейной апроксимации данных наблюдения. Прежде всего для рассматриваемого периода времени определяем функцию потребления в виде

$$C = b_1 + a_1 E + a_2 P, \tag{12}$$

где b_1, a_1 и a_2 — структурные коэффициенты. Значения этих коэффициентов получаем упомянутым выше мето-

дом, что дает:

$$b_1 = 34,90,$$
$$a_1 = 0,64,$$
$$a_2 = -0,33.$$

Таким образом, окончательно функция потребления имеет вид

$$C = 34,90 + 0,64E - 0,33P. \qquad (13)$$

Величина стандартного отклонения получается равной 1,32, что составляет 8,8% от средней арифметической величины C.

Расхождение между действительной и вычисленной величинами потребления объясняется следующими причинами:

1. Исключением прочих переменных. Внешние влияния (спрос, обусловленный послевоенным восстановлением, политические события), которые в рассматриваемый период воздействовали на потребление, отражены в используемых переменных только частично и поэтому их нельзя полностью учесть.

2. Величиной интервалов между наблюдениями. Данные, фиксируемые с интервалом в четверть года, подвержены сезонным колебаниям. Так, в четвертом квартале каждого года наблюдается рост потребления, обусловленный праздниками. Связанное с этим насыщение потребления вызывает в первом квартале значительное уменьшение спроса на потребительские товары.

3. Методами сбора материалов наблюдений.

Для нашей системы уравнений наряду с функцией потребления необходимо ввести еще функцию капиталовложений. Для ее определения используем изложенный выше метод. Постараемся апроксимировать линейной функцией эмпирические данные по валовым капиталовложениям, общей стоимости реализованных в пределах ФРГ товаров и услуг и чистому доходу независимых лиц и предпринимателей:

$$I = b_2 + a_3E + a_4U, \qquad (14)$$

где b_2, a_3, a_4 также являются постоянными структурными коэффициентами. Значения этих коэффициентов следующие:

$$b_2 = -2{,}17,$$
$$a_3 = 0{,}27,$$
$$a_4 = 0{,}23.$$

Окончательно функция капиталовложений имеет вид

$$I = -2{,}17 + 0{,}27E + 0{,}23U. \qquad (15)$$

Стандартное отклонение составляет 9,9% от среднего арифметического значения I.

Причины расхождения между вычисленными и действительными значениями капиталовложений по существу те же самые, что и в случае функции потребления. Общая сумма реализованных в пределах ФРГ товаров и услуг и чистый доход независимых лиц и предпринимателей являются переменными величинами, от которых существенно зависят капиталовложения. Но их влияние все же недостаточно для того, чтобы полностью определить размеры капиталовложений. Для этого нужно было бы ввести новые переменные, характеризующие экономические ожидания инвесторов. Значительная доля расхождений вызывается временем сбора сведений (в четвертом квартале наблюдается существенное сезонное уменьшение капиталовложений). При бо́льших интервалах времени между наблюдениями это расхождение было бы незаметно.

Уравнения (11), (13), (15) образуют систему вида (2). Эту систему при достаточно точных данных наблюдений можно использовать как для характеристики народнохозяйственных процессов, так и в качестве основы для общехозяйственного планирования. Коэффициенты для описывающих процесс зависимостей (13) и (15) при сделанных предположениях являются обязательными, так как оба структурных уравнения уже идентифицированы [1]).

---

[1]) Относительно идентификации см. Cowles Comission, Monograph 10, Chicago, 1950, работы Купманса, Рубина, Лейпника, Вальда и Гурвица.

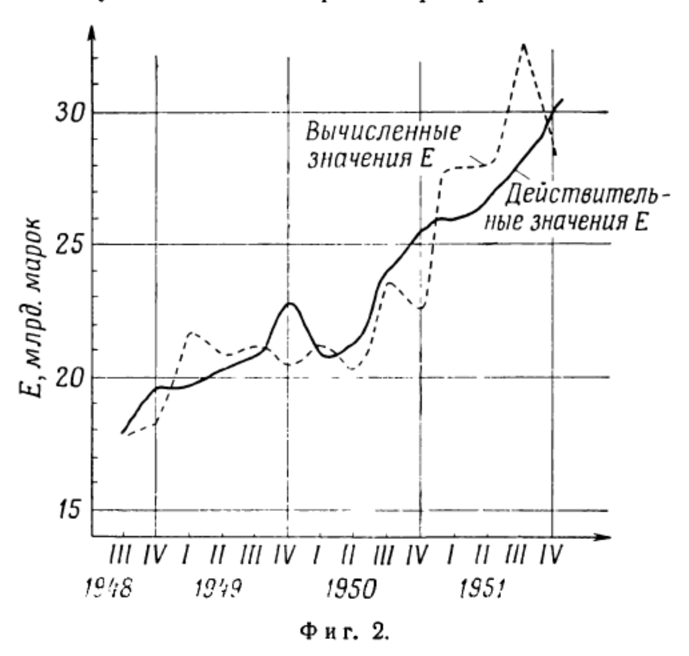
Чтобы решить эту систему, перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
0{,}64\,E - 0{,}33P - C & & &= -34{,}90, \\
0{,}27\,E & + 0{,}23U - I & &= 2{,}17, \qquad (16)\\
E \qquad - C & \qquad - I - V & &= 0.
\end{aligned}$$

Решение системы линейных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i; \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

легко получить, если ее расширенную матрицу подвергнуть следующим элементарным преобразованиям:



Фиг. 2.

1) произвести перестановку строк и перестановку столбцов (перестановка столбцов соответствует изменению нумерации x_i; она не распространяется на столбец b_i);

Таблица 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ВЫЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *E*

Период		Действительные значения *E*	Вычисленные значения *E*
1948	III	17,8	17,7
	IV	19,5	18,1
1949	I	19,7	21,6
	II	20,2	20,9
	III	20,9	21,1
	IV	22,8	20,4
1950	I	20,7	21,3
	II	21,3	20,1
	III	23,9	23,8
	IV	25,8	22,3
1951	I	26,1	27,7
	II	26,8	27,8
	III	28,3	32,9
	IV	30,5	27,7

2) умножить все элементы одной из строк на произвольный множитель $\lambda \neq 0$;

3) сложить умноженную на λ i-ю строку с j-й строкой, причем $i \neq j$.

Произведя такие преобразования над расширенной матрицей (16), получим в окончательном виде матрицу

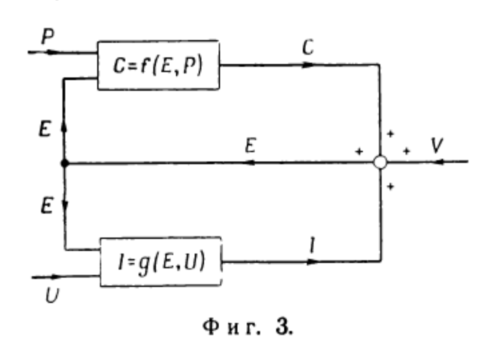
$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}85 & -3{,}73 & 0 & 8{,}08 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}94 & 1{,}07 & -3{,}04 & 97{,}07 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}85 & -2{,}73 & 1 & 8{,}08 \end{matrix} \right\|. \qquad (17)$$

В системе решений, относящихся к (16), U, I и V выступают в качестве параметров. Нас интересует система

решений уравнения, соответствующего первой строке матрицы (17):

$$E = -0{,}85U + 3{,}73I + 8{,}08. \quad (18)$$

В уравнении (18) общая сумма реализованных в пределах ФРГ товаров и услуг является линейной функцией чистого дохода независимых лиц и предпринимателей и валовых капиталовложений. На фиг. 2 представлено изменение вычисленных и действительных значений E (см. также табл. 1).



Фиг. 3.

Из уравнения (18) следует, что, пока существует экономическая структура, описываемая системой уравнений (16), увеличение в какой-либо промежуток времени капиталовложений на 1 млрд. марок при неизменном чистом доходе независимых лиц и предпринимателей вызывает увеличение в 3,73 раза общей суммы реализованных в пределах ФРГ товаров и услуг. Если же при неизменных капиталовложениях чистый доход независимых лиц и предпринимателей увеличится на 1 млрд., то сумма реализованных в пределах страны товаров и услуг уменьшится на 0,85 млрд. марок. Так как коэффициенты при U и I увеличивают значения U и I в соответственное число раз, можно первый коэффициент называть мультипликатором дохода, а второй — мультипликатором капиталовложений. Критерием качества полученных результатов может служить стандартное отклонение,

выраженное в процентах от среднеарифметического значения E. Оно равно 8,8%. На фиг. 3 система уравнений (16) представлена в виде структурной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cramér H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton Mathematical Series, 1951; русский перевод с издания 1946 г. см.: Крамер Г., Математические методы статистики, Издательство иностранной литературы, 1948.
2. Förstner K., „Kontinuierliche und diskontinuierliche Modelle"; русский перевод см.: Фёрстнер К., «Непрерывные и дискретные модели», настоящий сборник, стр. 153.
3. Förstner K., Henn R., Dynamische Theorie der Produktion, Meisenheim (в печати).
4. Fürst G., Deneffe P., „Der neue Preisindex für Lebenshaltung", *Wirtsch. u. Statist.* (1952).
5. Grünig F., „Quantative Betrachtungen zur Wirtschaftslage in Westdeutschland", *Vierteljahreshefte für Wirtschaftsforschung*, Bd. 1949, 1950, 1951, 1952.
6. Henn R., Die Auswertung wirtschaftlicher Beobachtungen, Meisenheim, 1955.
7. Liu C. T., Chang C. G., „U. S. Consumption and Investment Propensities. Prewar and Postwar", *Amer. Econ. Rev.*, **15** (1950).
8. Morgenstern O., The Accuracy of Economic Observations, Princeton, 1950.
9. Peter H., Mathematische Strukturlehre des Wirtschaftskreislaufs, Göttingen, 1954.
10. Schmidt E., Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, *Math. Ann.*, **63** (1907).
11. Waffenschmidt W. G., Modelle der deutschen Wirtschaft, Manuskript, Alfred-Weber-Institut, Heidelberg, 1931.
12. Schneider E., „Sinn und Grenzen der quantitativen Wirtschaftsforschung", *Zs. f. ges. Staatswiss.*, **108** (1950).
13. Koopmans T. D., „Statistical Inference in Dynamic Economic Models", Cowles Commission, Monograph 10, New York, London, 1950.
14. Waffenschmidt W. G., Anschauliche Einführung in die allgemeine und theoretische Nationalökonomie, Meisenheim, 1950, S. 168 ff.

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ[1])

К. ФЁРСТНЕР
(Гейдельберг)

В рассматриваемых ниже моделях мы будем иметь дело с величинами, которые можно выразить числами, например с количеством товаров или денег, временем и т. д. Эти величины по своей природе являются либо дискретными, либо непрерывными. Так например, некоторые товары можно измерять только в штуках, так что имеющиеся количества подобных товаров кратны одной штуке этого товара. С другой стороны, время мы представляем себе непрерывным. Таким образом, имеются величины, которые по своей природе являются дискретными, и такие, которые по своей природе являются непрерывными. Представление в виде модели не всегда должно совершенно точно соответствовать действительности; достаточно, чтобы модель обладала необходимой степенью приближения. Мы можем изображать дискретные величины в виде непрерывных, а непрерывные — в виде дискретных, если возникающие при этом ошибки не будут слишком большими. Во многих случаях подобное отклонение изображения от действительности дает более простые модели.

В кинематических моделях, т. е. в моделях, в которых переменные зависят от времени, применяются оба типа изображения времени. Так, в одних случаях можно время и зависящие от него переменные представить в непрерывном виде, а в других — разделить время на

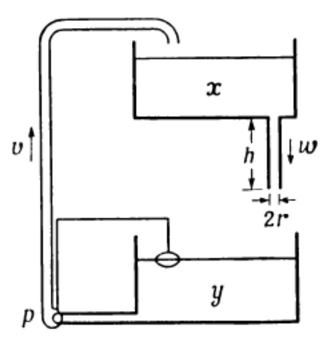
---

[1]) Förstner K., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge», стр 98—114.

отдельные периоды и все величины отнести к этим периодам. В первом случае мы будем называть модель дискретной (дискретный анализ: процесс — период [9]), во втором случае мы будем говорить о непрерывной модели (непрерывный анализ: процесс — скорость [9]), независимо от того, являются ли в действительности моделируемые величины дискретными или непрерывными.

1. МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛЬНОГО ПОТОКА

Поясним эти понятия на простой модели. Рассмотрим два резервуара с водой, расположенных друг над другом (фиг. 1). К верхнему резервуару прикреплена труба, по которой вода вытекает в нижний резервуар. С помощью насоса воду по другой трубе можно перекачивать обратно в верхний резервуар. Таким образом получается замкнутая система движения воды.



Фиг. 1. Непрерывный круговорот воды.

Обозначим количество воды в верхнем резервуаре через x, а в нижнем — через y; количество воды, вытекающее из верхнего резервуара, пусть будет w, а количество перекачиваемой в него воды — v. Изменение количества воды x во времени выражается тогда следующим образом:

$$\dot{x} = v - w \tag{1}$$

(производную по времени мы обозначаем точкой над символом переменной). Соответственно для изменения во времени количества воды в нижнем резервуаре y имеем

$$\dot{y} = w - v. \tag{2}$$

Общее количество воды в системе, а следовательно, и сумма количеств воды в верхнем и нижнем резервуарах, постоянно:

$$x+y=c. \tag{3}$$

По закону Пуазейля — Хагена [1])

$$w=\frac{\pi}{8}\frac{r^4\,\Delta p}{\eta h},$$

т. е. скорость истечения воды w пропорциональна ее количеству:

$$w=kx. \tag{4}$$

В нижнем резервуаре укреплен поплавок, являющийся регулятором уровня жидкости. Поскольку он линейно влияет на производительность насоса, имеем

$$bv=-a+y. \tag{5}$$

Фиг. 2. Структурная схема кругооборота, изображенного на фиг. 1.

Для переменных, участвующих в круговороте воды, справедлива блок-схема, изображенная на фиг. 2. Уравнения (1), (2), (4) и (5) описывают кругооборот воды. Если известны количества воды x или y для какого-либо момента времени, то можно определить поведение всей системы. Из (3) и (4) следует

$$w=k(c-y),$$

откуда, учитывая (2) и (5), получаем

$$\dot{y}=-(k+b)y+kc+a. \tag{6}$$

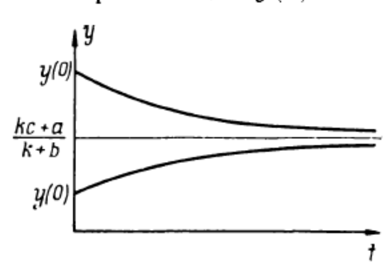
Уравнение (6) является дифференциальным уравнением относительно переменной y, связывающим перемен-

[1]) Здесь r — радиус трубы, h — ее длина, Δp — разность давлений, а η — коэффициент вязкости. — *Прим. ред.*

ную y с ее изменением во времени. Решение этого уравнения имеет вид

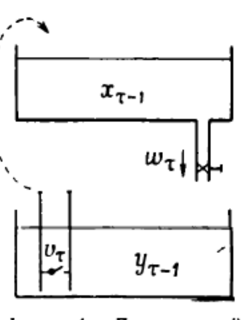
$$y(t) = \frac{kc+a}{k+b} + \left[y(0) - \frac{kc+a}{k+b}\right]e^{-(k+b)t}, \qquad (7)$$

где $y(t)$ — количество воды в нижнем резервуаре в момент времени t, а $y(0)$ — то же в момент времени $t = 0$. На фиг. 3 представлено изменение функции $y(t)$ для двух различных начальных значений $y(0)$. При $y(0) > (kc + a) / (k + b)$ на графике получается спадающая кривая, при $y(0) < (kc+a)/(k + b)$ — возрастающая кривая, причем обе кривые асимптотически приближаются к горизонтальной прямой $y = (kc + a)/(k + b)$. Если $y(0) = (kc + a)/(k + b)$, то количество воды y остается постоянным и вся система находится в состоянии равновесия.



Фиг. 3. Количество воды $y(t)$ в нижнем резервуаре устройства, показанного на фиг. 1, в зависимости от t.

Изменим теперь несколько рассмотренную систему. Уберем насос и снабдим трубу, по которой вода вытекает из верхнего резервуара, краном (фиг. 4). Пусть с интервалами в 1 час из нижнего резервуара вычерпывается определенное количество воды, затем, скажем, на 1 мин. открывается кран сливной трубы, после чего вычерпанная из нижнего резервуара вода выливается в верхний резервуар. Таким путем создается прерывный во времени кругооборот воды, при котором процесс совершается отдельными порциями. Обозначим количество воды в верхнем резервуаре после τ-го переливания через x_τ, а в нижнем резервуаре —



Фиг. 4. Дискретный кругооборот воды.

через y_τ. В данном случае общее количество воды также остается постоянным, поэтому

$$x_\tau + y_\tau = c. \tag{3a}$$

Пусть количество воды, вытекающее из верхнего резервуара при τ-м переливании, будет w_τ. Эта величина пропорциональна количеству жидкости в верхнем резервуаре

$$w_\tau = kx_{\tau-1}. \tag{4a}$$

Пусть черпак устроен таким образом, что количество вычерпываемой воды, которое мы обозначим через v_τ, линейно зависит от количества воды в нижнем резервуаре:

$$v_\tau = -a + by_{\tau-1}. \tag{5a}$$

Разность между количеством воды в верхнем резервуаре после τ-го и до τ-го переливания равна

$$x_\tau - x_{\tau-1} = v_\tau - w_\tau; \tag{1a}$$

аналогично и для нижнего резервуара

$$y_\tau - y_{\tau-1} = w_\tau - v_\tau. \tag{2a}$$

Уравнения (1а), (2а), (4а) и (5а) описывают отдельные периоды этого дискретного процесса, и мы можем, как и в случае непрерывного кругооборота воды, определить изменения заданных величин во времени. Из уравнений (3а) и (4а) следует

$$w_\tau = k(c - y_{\tau-1}).$$

Учитывая (2а) и (5а), имеем

$$y_\tau - y_{\tau-1} = k(c - y_{\tau-1}) + a - by_{\tau-1},$$

или

$$y_\tau = (1 - k - b)\, y_{\tau-1} + kc + a. \tag{6a}$$

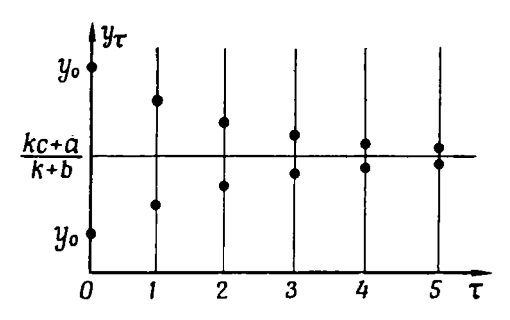
Поэтому для y_τ получаем

$$y_\tau = (1 - k - b)^\tau y_0 + (kc + a) \sum_{i=0}^{\tau-1} (1 - k - b)^i,$$

или после суммирования

$$y_\tau = \frac{kc+a}{k+b} + \left(y_0 - \frac{kc+a}{k+b}\right)(1-k-b)^\tau. \qquad (7а)$$

Это уравнение определяет содержимое нижнего резервуара в конце отдельных периодов времени. На фиг. 5 приведены значения y для отдельных периодов времени при двух различных начальных значениях y_0[1]. С течением времени y_τ приближается к граничному значению $(kc+a)/(k+b)$.



Фиг. 5. Количество воды y_τ в нижнем резервуаре устройства, показанного на фиг. 4, в зависимости от τ.

Если начальное значение $y_0 = (kc+a)/(k+b)$, то y_τ как и в непрерывном случае, остается постоянным.

Сравним теперь обе схемы кругооборота воды. В одном случае мы имеем непрерывный процесс, в другом дискретный. Непрерывный процесс описывается с помощью дифференциального уравнения (6)

$$\dot{y} = -(k+b)y + kc + a,$$

а дискретный процесс от периода к периоду описывается соотношением (6а)

$$y_\tau - y_{\tau-1} = -(k+b)y_{\tau-1} + kc + a.$$

[1] Будем считать, что при этом $k + b \leqslant 1$.

Это уравнение является уравнением в конечных разностях [8]. Под «уравнением в конечных разностях», или «разностным» уравнением, подразумевают соотношение между переменными, зависящими от различных аргументов. Если, как в данном случае, аргументом является индекс, соответствующий определенному периоду времени, то это значит, что разностное уравнение связывает друг с другом величины, относящиеся к разным периодам. В противоположность этому дифференциальное уравнение — если аргументом переменных является время — устанавливает связь между изменением переменных во времени и самими переменными.

Рассмотренный непрерывный процесс может быть описан дифференциальным уравнением, а дискретный — разностным, причем между этими уравнениями имеется соответствие. Действительно, если мы заменим в уравнении (6) производную $\dot{y}$ отношением разностей

$$\frac{y_\tau - y_{\tau-1}}{\tau - (\tau - 1)},$$

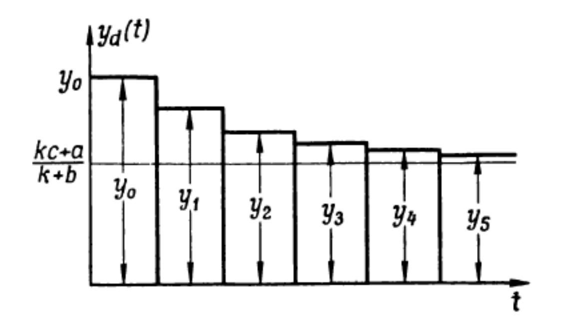
то получим разностное уравнение (6а). Таким образом, каждому дифференциальному уравнению можно поставить в соответствие разностное уравнение. В непрерывной модели процесс описывается функцией $y(t)$ [см. уравнение (7)], которая является решением дифференциального уравнения (6). В дискретной модели процесс характеризуется последовательностью чисел y_0, y_1, y_2, ... [см. уравнение (7а)], являющейся решением разностного уравнения (6а). Значения функции $y(t)$ указывают количество жидкости в нижнем резервуаре в отдельные моменты времени t. Числа y_τ указывают количество жидкости в τ-й период времени. Поэтому если мы для дискретного случая представим на графике количество воды в отдельные моменты времени в зависимости от времени t (фиг. 6), то получим ступенчатую функцию. Функция $y(t)$ в непрерывной модели является непрерывной, ступенчатая функция в дискретной модели

$$y_d(t) = y_\tau; \qquad t \in \tau\text{-му периоду}^{1)}$$

[1]) Символ $\in$ означает «принадлежит к ...».

является разрывной, если только y_0 не равно $(kc+a)/(k+b)$.

Мы убедились, что разностное уравнение (6a) соответствует дифференциальному уравнению (6). Это соответствие распространяется и на их решения: разрывная ступенчатая функция $y_d(t)$ является апроксимацией функции $y(t)$ (ср. фиг. 3 с фиг. 6) [1]).



Фиг. 6. Зависимость количества воды $y_d(t)$ от времени.

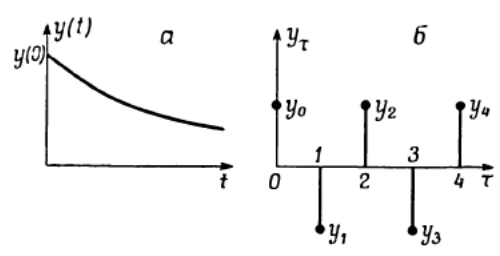
В первом случае непрерывный процесс изображается с помощью непрерывной модели, во втором случае мы имеем дискретный процесс, который описывается дискретной моделью. Так как функции $y_d t$ и $y(t)$ взаимно апроксимируют друг друга, то мы можем изображать непрерывный процесс и дискретной моделью, а дискретный — непрерывной моделью. Возникающая при этом ошибка будет не очень велика. Выбор дискретного или непрерывного метода изображения заданного процесса зависит от допустимых ошибок, соображений наглядности и простоты вычислительных операций.

---

[1]) Аналитически это видно из сравнения уравнений (7) и (7a) при замене в (7) величины $e^{-(k+b)}$ ее первым приближением $1-(k+b)$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В только что рассмотренном примере непрерывный способ рассмотрения привел к дифференциальному уравнению (6), а дискретный — к разностному уравнению (6а). Эти уравнения, а также их решения (7) и (7а) взаимно соответствуют друг другу. Мы убедились также, что с помощью простого способа можно каждому дифференциальному уравнению привести в соответствие разностное уравнение. Однако при установлении такого



Фиг. 7. Сравнение решений дифференциального (*а*) и разностного (*б*) уравнений.

соответствия необходимо следить за тем, чтобы и решения также соответствовали друг другу. Существуют такие пары дифференциальных и разностных уравнений, решения которых существенно различны. Пусть, например

$$\dot{y} = -2y;$$

этому дифференциальному уравнению соответствует разностное уравнение

$$y_\tau = -y_{\tau-1}.$$

Решения этих уравнений соответственно имеют вид

$$y(t) = y(0)\, e^{-2t}$$

и

$$y_\tau = (-1)^\tau y_0.$$

В первом случае мы имеем затухающую, всегда положительную (для положительных значений y_0) экспоненциальную функцию (фиг. 7, *а*), во втором случае —

знакопеременную последовательность чисел (фиг. 7, *б*). Такая плохая апроксимация одного решения другим происходит потому, что продолжительность периодов выбрана слишком большой. Если мы при дискретном рассмотрении (в разностном уравнении) выберем более мелкие периоды, то и в этом случае получим соответствующие друг другу решения.

Далее следует иметь в виду, что, хотя каждому дифференциальному уравнению можно привести в соответствие разностное уравнение, обратное утверждение неверно. Существуют разностные уравнения, которые не имеют соответствующих им дифференциальных уравнений, например

$$y_\tau = \sum_\nu a_{\tau\nu} y_\nu$$

при известных $a_{\tau\nu}$. Соответствующей непрерывной аналогией этого уравнения является *интегральное* уравнение

$$y(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t, s)\, y(s)\, ds,$$

где $a(t, s)$ — некоторая известная функция двух переменных. Еще одним примером является разностное уравнение

$$y_\tau = 2y_{\tau-1} + \sum_\nu a_{\tau\nu} y_\nu,$$

которому соответствует интегро-дифференциальное уравнение

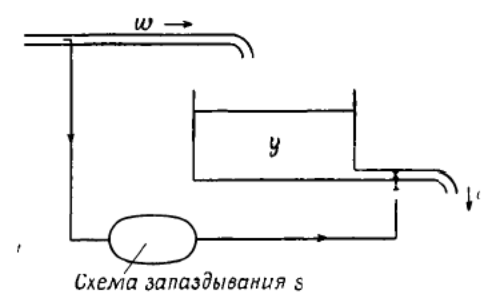
$$\dot{y}(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t_1} a(t, s)\, y(s)\, ds.$$

Таким образом, в случае непрерывных моделей будут встречаться не только дифференциальные, но также интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

Для сложных моделей вместо отдельных уравнений получаются целые системы уравнений. При наличии многих величин, зависящих от времени, некоторые из них можно рассматривать как непрерывные, а остальные как

дискретные; получается смешанная форма модели, которая частично непрерывна, а частично дискретна.

Обсудим и сопоставим теперь полученные результаты. Кинематические модели, т. е. такие модели, в которых переменные зависят от времени, можно разделить на непрерывные и дискретные (а также смешанные). Величины, встречающиеся в непрерывных моделях, являются функциями времени. При дискретном рассмотрении время подразделяется на отдельные интервалы (периоды) и все величины относят соответственно к этим периодам.



Фиг. 8. Простейшая модель кругооборота воды с временным запаздыванием.

Непрерывные модели описываются системами дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. В случае дискретных моделей им соответствуют системы разностных уравнений.

До сих пор мы лишь в дискретных моделях рассматривали зависимости между величинами, относящимися к различным периодам времени. В непрерывных соотношениях мы предполагали, что все переменные относятся к одному и тому же моменту времени. Мы должны будем отказаться от этого ограничения, если хотим учесть запаздывания и т. п.

Рассмотрим в качестве примера изображенную на фиг. 8 схему движения воды. Пусть количество протекающей жидкости v зависит от емкости резервуара y и от количества воды w, поступившей на время s ранее:

$$v(t) = kw(t-s)\,y(t).$$

Поскольку

$$\dot{y} = w - v,$$

то

$$y(t) = w(t) - kw(t-s)\,y(t).$$

Это уравнение является смешанным — дифференциальным и разностным. Таким образом, в непрерывных моделях также могут появляться разностные уравнения.

3. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

До сих пор мы рассматривали формальные свойства временных моделей в общем виде. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением экономических моделей. В каждой экономической модели имеются субъекты и объекты [15]. В качестве субъектов выступают отдельные лица или группы лиц, которые должны принимать решения. Эти лица ставят себе определенные цели, например, потребитель руководствуется принципом наибольшей полезности, предприниматель действует по принципу получения максимальной прибыли. Объекты определяют экономические переменные, такие, как количество товаров, доходы, капиталовложения, цены, оборот. Эти переменные находятся в зависимости друг от друга, что придает модели определенную структуру. Некоторые из этих зависимостей являются определениями, например

$$\text{Оборот} = \text{Цена} \times \text{Объем сбыта}.$$

Таким образом, субъекты определяют целевые установки, которые должны рассматриваться в модели, а объекты — переменные и определенные существующие между ними связи.

В зависимости от их значения для экономической теории и практики экономические модели можно разделить на две группы: реальные модели и идеальные модели. С помощью реальных моделей можно «экспериментально» исследовать конкретные экономические отношения или общие закономерности. В отличие от есте-

ственных наук, где эксперименты можно, вообще говоря, повторять в одних и тех же условиях неограниченное число раз, в экономике приходится считаться с конкретными условиями экономического развития. Исследуя переменные в некоторой области экономики, устанавливают существующие между ними соотношения. Затем путем использования данных наблюдения определяют появляющиеся в этих соотношениях коэффициенты. Хенн подробно изложил подобные методы в своем докладе [6]. Идеальные модели имеют прежде всего чисто теоретическое значение. С их помощью теоретически вскрываются экономические зависимости. Они призваны внести ясность в применяемые понятия и способствовать работе интуиции. Кроме того, они являются прототипами для реальных моделей.

Экономическая модель называется статической, если в ней время не принимается в расчет и рассматриваются только альтернативные ситуации. Примером такой модели может служить модель монопольного предложения (она является идеальной моделью), рассмотренная в работах Шнейдера, Штакельберга и Ваффеншмидта [10, 13, 17].

Пусть рассматривается некоторое предприятие. Экономическими переменными в этом случае являются (если отвлечься от проблемы минимальных издержек) оборот U, выпуск товаров x [1]), издержки K, цена проданных товаров p и прибыль G. Оборот определяется выражением

$$U = px. \tag{8}$$

Издержки зависят от выпуска

$$K = K(x). \tag{9}$$

Допустим теперь, что предприятие имеет монопольное положение в стране и поэтому для него зависимость между ценой и сбытом соответствует графику,

---

[1]) Мы ограничиваемся случаем, когда предприятие выпускает продукцию только одного наименования.

изображенному на фиг. 9. Таким образом, имеется зависимость цены от величины x

$$p = p(x), \tag{10}$$

т. е.

$$U(x) = p(x)\,x.$$

Предприниматель действует в соответствии с принципом получения максимальной прибыли. Поэтому встает вопрос о таком выпуске продукции, при котором прибыль предприятия окажется максимальной. Для этого оптимального выпуска имеем

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dK}{dx}, \tag{11}$$

т. е. предприятие будет иметь максимальную прибыль при таком выпуске продукции, при котором увеличение выпуска на одну единицу дает такое же увеличение оборота и издержек (теорема Курно) [1].

Фиг. 9. Характеристика рыночного спроса.

Итак, в нашем примере мы имеем ряд переменных: x, U, p, K. Они связаны тремя соотношениями: соотношение (8) имеет характер определения, а формулы (9) и (10) описывают положенные в основу модели конкретные условия. Переменные и зависимости между ними определяются объектами. Субъектом в данном случае является предприниматель, цель которого состоит в получении максимальной прибыли. Из принципа получения максимальной прибыли с учетом только что упомянутых зависимостей в качестве общего закона следует уравнение (11).

В противоположность статическим моделям те модели, в которых переменные зависят от времени, называют *кинематическими*, например модель производства Тинтнера [14]. Здесь начинает обнаруживаться различие между непрерывным и дискретным методами рассмотрения. При непрерывном методе переменные относят к

[1]) Эта теорема была сформулирована Курно еще в начале прошлого столетия [3].

одним и тем же *моментам* времени (переменные являются функциями времени), при дискретном же методе переменные относят к *периодам* времени (получается временной ряд).

Соотношение, устанавливающее зависимость между переменными, относящимися к различным моментам времени (дискретный метод рассмотрения), или между переменными и их производными по времени (непрерывный метод рассмотрения), называется *динамическим*. Кинематическая модель экономики называется динамической [2, 5, 7, 9], если в ней появляются динамические соотношения. Таким образом, в динамических моделях учитывается влияние принятых ранее экономических решений на более поздние условия; в этом состоит их динамический характер.

4. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОНОПОЛЬНОГО РЫНКА

По инициативе проф. Ваффеншмидта д-р Хенн и автор разработали динамическую модель монопольного рынка [4]. Рассмотрим вкратце эту модель.

Сбыт продукции какого-либо предприятия зависит не только от текущих цен, но также и от сбыта, который имел место ранее (перенасыщение, дефицит). Предположим, что некоторый монополист в τ-й период времени сбывает товары по цене p Количество проданных в этот период товаров обозначим через x_τ. Пусть сбыт в τ-й период зависит от цены p в этот период и от сбыта $_{\tau-1}$ за предшествовавший период (для простоты мы пренебрегаем более ранними периодами). Тогда можно написать

$$x_\tau = x_\tau(p_\tau, x_{\tau-1}),$$

или, если мы разрешим это уравнение относительно p_τ,

$$p_\tau = p_\tau(x_\tau, x_{\tau-1}). \qquad (12)$$

Именно это уравнение превращает модель в динамическую, так как оно связывает между собой величины, относящиеся к различным периодам.

Уравнение (12) есть дискретное соотношение. Рассматривается большой промежуток времени I, который подразделяется на отдельные периоды $I_1, I_2, \ldots, I_T$. Все величины связываются соответственно с этими подпериодами. На фиг. 10 показано разбиение I на пять периодов. Выпуски продукции[1]) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 в эти периоды представлены прямоугольниками. Общий выпуск за время I изображается суммой площадей всех заштрихованных прямоугольников. Оборот за τ-й период равен

$$U_\tau = x_\tau p_\tau, \qquad (13)$$

а издержки

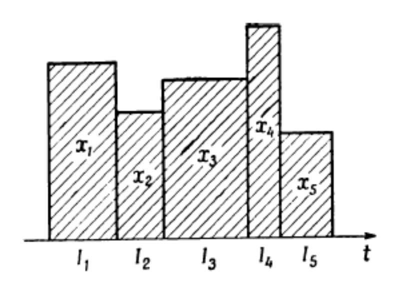
$$K_\tau = K_\tau(x_\tau). \qquad (14)$$

Для прибыли G_τ в τ-й период имеем

$$G_\tau = U_\tau - K_\tau. \qquad (15)$$

Прибыль G за весь промежуток I равна

$$G = \sum_{\tau=1}^{T} G_\tau. \qquad (16)$$



Фиг. 10. Выпуск продукции предприятием за отдельные плановые периоды.

Целевая установка предпринимателя (субъекта) состоит в получении максимальной прибыли. Сформулируем точнее эту целевую установку. Она состоит в том, что производство и сбыт должны в каждый период осуществляться с максимальной прибылью — эту цель мы назовем «получением максимальной прибыли в малом» или что прибыль G должна быть максимальной за весь промежуток времени I (для простоты мы пренебрегаем дисконтированием) — такую цель мы назовем «получением максимальной прибыли в большом». В случае стремления к получению максимальной прибыли в большом условия оптимального выпуска продукции выра-

---

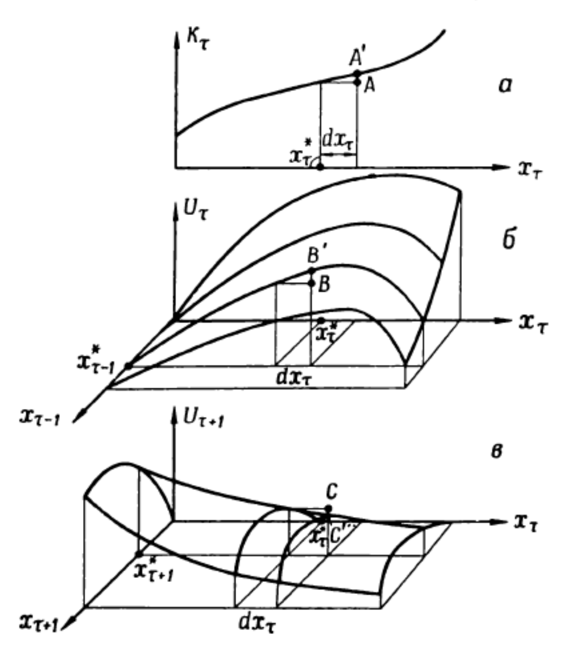
[1]) Предполагается, что выпуск и сбыт все время соответствуют друг другу (время хранения на складе равно нулю), т. е. величина x_τ определяет как выпуск, так и сбыт в период I_τ.

жаются следующими разностными уравнениями:

$$\frac{\partial U_{\tau+1}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial U_\tau}{\partial x_\tau} = \frac{dK_\tau}{dx_\tau}, \qquad \frac{\partial U_T}{\partial x_T} + \frac{\partial K_T}{\partial x_T}, \tag{17}$$

$$(\tau = 1, 2, \ldots, T-1).$$

Поясним сказанное с помощью фиг. 11. Издержки K_τ в τ-й период зависят от выпуска продукции x_τ; эта



Фиг. 11. Максимальная прибыль в большом для динамической модели рынка.

зависимость представлена на фиг. 11, *а*. В соответствии с уравнениями (12) и (13) для оборота U_τ имеем

$$U_\tau(x_\tau, x_{\tau-1}) = x_\tau p_\tau(x_\tau, x_{\tau-1}),$$

а для $U_{\tau+1}$ —

$$U_{\tau+1}(x_{\tau+1}, x_\tau) = x_{\tau+1} p_{\tau+1}(x_{\tau+1}, x_\tau).$$

Следовательно, U_τ и $U_{\tau+1}$, всегда зависят от двух переменных. При графическом изображении (фиг. 11, *б* и *в*) мы, таким образом, получаем поверхности в пространстве $(U_\tau, x_{\tau-1}, x_\tau)$ и $(U_{\tau+1}, x_\tau, x_{\tau+1})$ соответственно. На каждом графике указаны значения $x^*_{\tau-1}$, x^*_τ, $x^*_{\tau+1}$ выпуска продукции, соответствующего получению максимальной прибыли в большом.

Уравнение (17) показывает, что для получения максимальной прибыли в большом увеличение издержек dK_τ в каждом периоде I_τ $(\tau = 1, 2, ..., T - 1)$ при увеличении x^*_τ на одну единицу при прочих равных условиях равно сумме приростов оборота dU_τ и $dU_{\tau+1}$ (динамическая теорема Курно). На фиг. 11 рассматривается увеличение выпуска x^*_τ на dx_τ. Поскольку $dU_{\tau+1}$ может быть и отрицательным, имеем

$$dU_\tau = |dU_{\tau+1}| + dK_\tau.$$

Таким образом, сумма отрезков $\overline{AA'}$ и $\overline{CC'}$ равна отрезку $\overline{BB'}$.

В непрерывных моделях вместо значений выпуска продукции $x_1, x_2, ..., x_T$ в отдельные периоды рассматриваются мгновенные значения выпуска в момент времени t. Пусть период времени, представляющий интерес при планировании, длится от t_0 до t_1, так что $I = (t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Пусть, далее, общий выпуск продукции за время от t_0 до t равен $x(t)$. Мгновенное значение[1]) выпуска $\dot{x}(t)$ в момент времени t является производной по времени от x

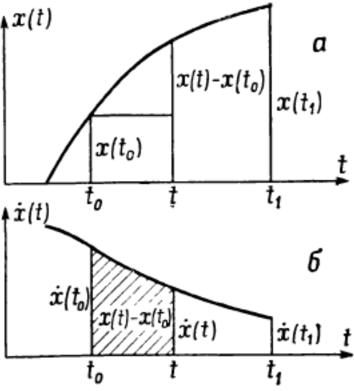
$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$

и представляет собой скорость изменения выпуска продукции, которая указывает, как изменяется общий выпуск продукции в момент времени t. Следовательно, вместо ряда дискретных значений $x_1, x_2, ..., x_T$ мы имеем теперь некоторую функцию $\dot{x}(t)$.

---

[1]) Применяемый здесь и далее термин «мгновенное значение» неточен; речь идет о скорости изменения соответствующей величины. — *Прим. ред.*

Временной график общего выпуска и мгновенного значения выпуска представлен на фиг. 12. Здесь $x(t_0)$ — общее количество товаров, изготовленных на данном предприятии и проданных до момента времени t_0, т. е. до начала рассматриваемого периода I. Общий выпуск за период от t_0 до t равен $x(t) - x(t_0)$ (на фиг. 12, *а* он представлен отрезком ординаты, на фиг. 12, *б* — заштрихованной площадью).



Фиг. 12. Выпуск продукции (*а*) и скорость выпуска (*б*) при непрерывном методе рассмотрения.

Пусть $p(t)$ — цена в момент времени t. В соответствии с уравнением (12) предположим, что цена $p(t)$ зависит от мгновенного значения сбыта $\dot{x}(t)$ [1]) и от общего предшествовавшего сбыта $x(t)$

$$p(t) = p(\dot{x}(t), x(t)). \quad (12a)$$

Таким образом, уравнение (12а) устанавливает связь между функциями $\dot{x}(t)$ и $x(t)$ и функцией $p(t)$. Мгновенное значение оборота определяется выражением

$$\dot{U}(t) = \dot{x}(t)\, p(t). \quad (13a)$$

Мгновенное значение издержек производства $\dot{K}$ зависит от мгновенного значения выпуска продукции

$$\dot{K}(t) = \dot{K}(\dot{x}(t)). \quad (14a)$$

Для мгновенного значения прибыли имеем

$$\dot{G}(t) = \dot{U}(t) - \dot{K}(t). \quad (15a)$$

Согласно принципу получения максимальной прибыли в большом необходимо, чтобы общая прибыль G за период

---

[1]) Мы принимаем здесь, как и в дискретной модели, что выпуск всегда равен сбыту.

времени I [1])

$$G = \int_{t_0}^{t_1} \dot{G}(t)\,dt \tag{16a}$$

была максимальной. Это некий вариационный принцип, аналогичный, например, принципу Гамильтона в механике. Подобно тому как из принципа Гамильтона можно вывести уравнения Лагранжа, из принципа получения максимальной прибыли следует уравнение

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{K}}{\partial \dot{x}}\right) \tag{17a}$$

с дополнительным условием

$$\left.\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = \left.\frac{d\dot{K}}{d\dot{x}}\right|_{t=t_1}.$$

При более общих предположениях взамен уравнений (17) и (17a) получаем

$$\sum_{t=\tau}^{T} \frac{\partial U_t}{\partial x_{\mu\tau}} q_t = \frac{\partial K_\tau}{\partial x_{\mu\tau}} q_\tau$$

или

$$\int_{t}^{t_1} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x_\mu} q(\tau)\,d\tau + \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}_\mu} q(t) = \frac{\partial \dot{K}}{\partial \dot{x}_\mu} q(t).$$

Значения q_τ или соответственно функции $q(t)$ обеспечивают дисконтирование [11]. Дело в том, что при получении максимальной прибыли в большом добиваются получения максимума не общей суммы прибыли за промежуток времени I, а максимума капитализированной величины общей прибыли

$$G = \sum_{\tau=1}^{T} G_\tau q_\tau,$$

[1]) Для простоты мы опять пренебрегаем дисконтированием.

или соответственно

$$G = \int_{t_0}^{t_1} G(t)\, q(t)\, dt.$$

Итак, в чем сущность этой динамической модели? Мы выбрали для рассмотрения определенные экономические объекты, т. е. считали заданными определенные экономические величины, а именно выпуск продукции, издержки, оборот, цену и прибыль. Они представляли собой функции времени (непрерывный метод рассмотрения) или последовательности чисел (дискретный метод рассмотрения). Между этими переменными существовали некоторые зависимости: уравнения (13), (15) и (16) или (13а), (15а) и (16а) играли роль определений, а уравнения (12) и (14) или (12а) и (14а) представляли конкретные данные экономических условий. Все эти зависимости определялись объектами модели в виде ее структуры. Субъектом модели являлся предприниматель. Мы предположили, что его целевая установка состоит в получении максимальной прибыли в большом. Это в непрерывном случае привело к вариационному принципу. Условие осуществления этой целевой установки в непрерывном случае дается дифференциальным уравнением (17а), а в дискретном случае — разностным уравнением (17). При усовершенствовании модели мы получим вместо приведенных простых соотношений системы интегродифференциальных уравнений и т. д. Учет времени, необходимого для производства товаров, и времени их складского хранения приводит и в непрерывном случае к разностным уравнениям.

5. ФОРМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Обсудим теперь экономические модели формально в самом общем виде. В только что рассмотренной непрерывной модели переменная $\dot{x}$, соответствующая мгновенному значению выпуска продукции, являлась функцией

времени t. Уравнением (14а) издержки $\dot{K}(t)$ определяются в зависимости от мгновенного значения выпуска продукции $\dot{x}(t)$. Таким образом, функции $\dot{x}(t)$ ставится в соответствие функция $\dot{K}(t)$:

$$\dot{x}(t) \to \dot{K}(t).$$

Динамическое соотношение цена — объем сбыта (12а) задает соответствие

$$\dot{x}(t) \to p(t).$$

Оба эти *изображения*, которые устанавливают соответствие между функцией $\dot{x}(t)$ и функциями $\dot{K}(t)$ и $p(t)$, принимались в модели заданными. Определяемые уравнениями (13а), (15а) и (16а) изображения

$$\dot{x}(p),\ p(t) \to \dot{U}(t),$$
$$\dot{U}(t),\ \dot{K}(t) \to \dot{G}(t),$$
$$\dot{G}(t) \to G,$$

устанавливающие соответствие между парами функций $(\dot{x}(t), p(t))$, $(\dot{U}(t), \dot{K}(t))$ и функциями $\dot{U}(t)$, $\dot{G}(t)$ и между функцией $\dot{G}(t)$ и числом G, имеют характер определений. Если последовательно выполнить все преобразования, получим изображение

$$\dot{x}(t) \to G,$$

которое устанавливает соответствие между функцией мгновенного выпуска и общей прибылью за промежуток времени I.

В дискретной модели вместо функции $\dot{x}(t)$ фигурирует последовательность чисел $(x_1, x_2, ..., x_T)$. Эта последовательность с помощью уравнения (14) приводится в соответствие с последовательностью $(K_1, K_2, ..., K_T)$ издержек в периоды $I_1, I_2, ..., I_T$[1]:

$$(x_\tau) \to (K_\tau).$$

[1]) Для краткости будем вместо последовательностей $(x_1, x_2, \ldots \ldots x_T)$, $(K_1, K_2, \ldots, K_T)$ и т. д. писать (x_τ), (K_τ) и т. д.

Уравнением цена — сбыт (12) определяется изображение

$$(x_\tau) \to (p_\tau).$$

Изображения

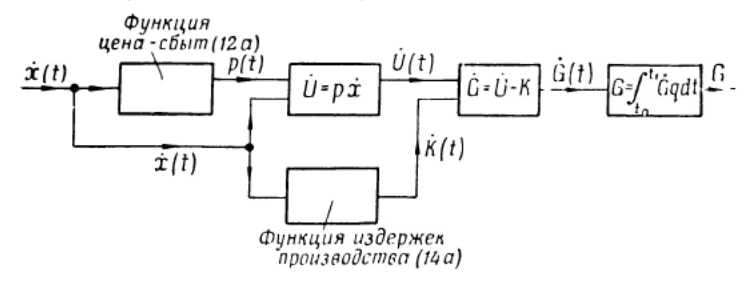
$$(x_\tau,\ p_\tau) \to (U_\tau),$$

$$(U_\tau,\ K_\tau) \to (G_\tau)$$

и

$$(G_\tau) \to G,$$

получаемые с помощью уравнений (13), (15) и (16), и в этом случае являются определениями.



Фиг. 13. Структурная схема динамической модели монопольного рынка.

Следовательно, мы можем сказать, что налицо экономическая модель, если имеется система совокупностей экономических переменных, которые с помощью изображений наделены определенной структурой. В модели выпуска продукции используются следующие совокупности экономических переменных [17]:

$\{\dot{x}(t)\}$, $\{p(t)\}$, $\{\dot{U}(t)\}$, $\{\dot{K}(t)\}$, $\{\dot{G}(t)\}$, $\{G\}$ (непрерывная модель),

$\{(x_\tau)\}$, $\{(p_\tau)\}$, $\{(U_\tau)\}$, $\{(K_\tau)\}$, $\{(G_\tau)\}$, $\{G\}$ (дискретная модель).

Структура изображений этих совокупностей была только что приведена. Эту структуру можно наглядно представить, как это принято в теории регулирования, в виде некоторой *структурной схемы*. На фиг. 13 приведена подобная схема для непрерывной модели.

Заданная экономическая модель, переменные которой зависят от времени, называется динамической, если в структуру ее изображений входят зависимости, выражаемые с помощью дифференциальных, разностных или интегральных уравнений или уравнений смешанного вида. Рассмотренная модель, следовательно, является динамической в силу уравнений (12) или (12а). В дискретных моделях переменные представляются в виде последовательностей чисел, в непрерывных они являются функциями времени. При применении вероятностных методов получают *стохастические* модели [1]).

В экономические модели, учитывающие целевые установки субъектов, вводятся некоторые принципы, касающиеся этих целевых установок. Из этих принципов тогда вытекают общие соотношения (условия равновесия) для переменных. Если субъекты ведут себя в соответствии со своими целевыми установками, то решения этих общих соотношений описывают принимаемые субъектами решения и вытекающие из них экономические результаты [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Baumol W. I., Economic Dynamics, New York, 1951.
2. Birkhoff G. D., Dynamical Systems, New York, 1927; русский перевод см.: Биркгофф Г., Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
3. Cournot A., Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, Paris, 1838.
4. Förstner E., Henn R., Dynamische Produktionstheorie, Meisenheim, 1957.
5. Frisch R., „On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium", *Econ. J.* (1935).
6. Henn R., „Die Gewinnung statischer Kennlinien"; русский перевод см.: Хенн Р., «Определение статических характеристик по материалам наблюдений», настоящий сборник, стр. 137.
7. Henn R., Uber dynamische Wirtschaftsmodelle, Stuttgart, 1956.
8. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin, 1924.
9. Samuelson P. A., Foundations of Economic Analysis, Cambridge, Mass., 1951.

---

[1]) Стохастические модели приведены, например, Тинтнером [14].

10. Schneider E., Theorie der Produktion, Wien, 1934.
11. Schneider E., Wirtschaftlichkeitsrechnung, Tübingen, 1951.
12. Schubert H., Differentialgleichungen, конспект лекций, Heidelberg, 1954.
13. Stackelberg H., Grundlagen einer reinen Kostentheorie, Wien, 1932.
14. Tintner G., „A Contribution to the Nonstatic Theory of Production", см. Studies in Mathematical Economics and Econometrics, edited by O. Lange, F. McIntre, Th. Yntema, Chicago, 1942.
15. Waffenschmidt W. G., Anschauliche Einführung in die allgemeine und theoretische Nationalökonomie, Meisenheim, 1950.
16. Waffenschmidt W. G., Wirtschaftsmechanik, конспект лекций, 1954—1955.
17. Waffenschmidt W. G., Produktion, Meisenheim, 1955.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ [1])

К. Ю. ЛЕЗЕМАН

(Дармштадт)

За последние годы в связи с непрерывно возрастающими требованиями прикладной математики быстрыми темпами происходит развитие вычислительной техники. Задачи, которые приходится решать в настоящее время, становятся все более сложными и трудными с математической точки зрения. Они требуют большого объема вычислительной работы, а время, затрачиваемое на их решение, должно все время уменьшаться. Поэтому в настоящее время вычислительные устройства совершенствуются в следующих направлениях: максимально возможная универсальность, автоматизация, повышение точности и быстродействия.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Различают две основные группы вычислительных устройств — цифровые и моделирующие устройства (машины дискретного и непрерывного действия).

Первые из них оперируют с цифрами, они выполняют четыре арифметических действия над дискретными числами, т. е. являются *дискретными* системами. Одним из их характерных элементов является счетчик. К этим машинам относятся, например, обычные арифмометры,

---

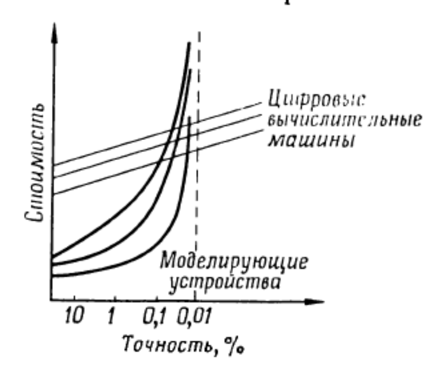
[1]) Lesemann K.-J., сборник «Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge», стр. 115—143.

решающие элементы которых являются механическими (ступенчатый валик, зубчатые колеса и т. п.), и современные электрические или электронные автоматические вычислительные устройства. В автоматических вычислительных машинах объединены функции арифмометра (вычисление) и оператора (управление и регистрация результатов). Перед началом вычислений машине задают программу решения и входные данные, записанные на перфоленту или перфокарты, после чего она самостоятельно с большой скоростью производит вычисления и выдает результаты в виде напечатанных таблиц. Точность, с которой могут работать вычислительные машины, теоретически не ограничена. Можно легко повысить число знаков обрабатываемых чисел, однако при этом пропорционально возрастают и затраты. Увеличение числа знаков вдвое примерно означает и удвоение затрат.

В отношении устройств второго типа дело обстоит иначе. В них данные математической задачи воспроизводятся в виде физических величин, например в виде углов, отрезков, токов или напряжений. Эти величины могут непрерывно изменяться, так что решение производится не с помощью отдельных дискретных чисел, а с помощью непрерывно меняющихся функций. Поэтому такие устройства называют также вычислительными устройствами *непрерывного действия* или *моделирующими* (аналоговыми) устройствами. К ним относятся, например, логарифмическая линейка (числа представлены отрезками), планиметр или современные интеграторы.

Вычислительные операции, выполняемые в моделирующих устройствах, основаны на физических закономерностях, которые реализуются с помощью механизмов или электрических цепей. Поэтому они могут производить не только операции сложения и вычитания, но и деления, умножения, интегрирования и дифференцирования. Математические действия над какими-либо мгновенными значениями функций выполняются, в принципе, мгновенно, путем соответствующей настройки механизма или электрической цепи. Иначе говоря, при некотором изменении входных величин соответствующим образом мгновенно изменяются и выходные величины (сумма,

произведение, интеграл и т. п.), так что время, необходимое для выполнения математической операции, по существу равно нулю. Время требуется лишь для пробегания всей области изменения функций, т. е. для исследования изменения переменных. Это время зависит от типа и размеров устройства и колеблется от 0,5 часа до 0,01 сек.



Фиг. 1. Сравнение стоимости изготовления цифровых вычислительных машин и моделирующих устройств в зависимости от точности при различных размерах установок.

Точность вычислений, производимых с помощью математических машин этого типа, ограничена, поскольку работа ведется с физическими величинами. Механические детали, например, при их тщательном исполнении с разумными затратами могут быть изготовлены только с точностью 0,01 *мм*, т. е. максимально достижимая точность не превосходит 0,01%. Эта цифра является, по-видимому, предельной для моделирующих устройств. Это видно из фиг. 1, воспроизведенной из работы [1]. Стоимость моделирующих устройств резко возрастает при приближении к этой границе, в то время как для цифровых машин она растет линейно.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР [2]

Первые механические машины для выполнения четырех арифметических действий были спроектированы Паскалем (1641 г.) и Лейбницем (1672 г.). Мысль об автоматизации вычислительного процесса впервые была, по-видимому, высказана англичанином Бэббиджем в 1830 г. Его чисто механическая машина была, однако,

непригодна к эксплуатации, и только с развитием электроники автоматические вычислительные машины стали входить в обиход.

Развитие современных автоматических вычислительных машин началось в конце 30-х годов. С 1945 г. в США и ряде других стран было построено значительное количество больших и быстродействующих автоматических вычислительных машин. В ФРГ цифровые машины разрабатываются с 1950 г. в Геттингене, Мюнхене и Дармштадте [3]. В Геттингене созданы две автоматические вычислительные машины (G1 и G2) и одна — в Мюнхене (PERM). Создание машины в Дармштадте находится в стадии завершения.

Развитие моделирующих устройств происходило аналогичным образом. Хотя логарифмическая линейка (1627 г.) и планиметр (1814 г.) известны давно, большие устройства созданы только за последние 25 лет. Первый механический интегратор был изготовлен в 1930 г. (В. Буш в США [4]). С 1945 г. началось бурное развитие прежде всего электронных моделирующих устройств. В настоящее время в США имеется большое количество установок, выпускаемых серийно. В Германии Институтом прикладной математики Дармштадтского высшего технического училища совместно с фирмой А. Отт за период с 1940 по 1944 г. построен механический интегратор, который был реконструирован в 1952 г. [5]. Некоторое количество механических интеграторов за последнее время выпущено фирмой «Шоппе и Фезер» в Миндене. Электронные интеграторы в настоящее время в ФРГ еще не применяются, однако они разрабатываются рядом организаций.

ДВЕ ГРУППЫ ЗАДАЧ ЭКОНОМИКИ

Математическая формулировка экономических задач приводит по существу к двум основным группам задач: 1) системы линейных уравнений и 2) дифференциальные уравнения. Первую группу можно назвать *статической.*

В ней либо рассматриваются состояния равновесия, либо все переменные в определенном интервале считаются постоянными. Например, в системе затраты — выпуск Леонтьева [6] описывается взаимная связь и зависимость отдельных элементов более крупной экономической совокупности и исследуется влияние изменения одной или нескольких компонент на остальные. Все это приводит к большим системам линейных уравнений.

Могут встретиться также и системы линейных неравенств. Если в них ввести дополнительные неизвестные, то они превратятся в систему уравнений, в которой число неизвестных превышает число уравнений. В этом случае требуются дополнительные условия, такие, например, как максимизация выгоды, сведение к минимуму транспортных затрат или длины перевозки. Путем статистической проверки большого числа возможных решений при одновременном соблюдении условий экстремальности отыскивается правильное решение. Этот разработанный в США метод называется *симплекс-методом* [7, 8] [1]; он требует проведения огромного количества вычислений. Его эффективное применение возможно только при применении быстродействующей автоматической вычислительной машины.

Так, например, решение полной несимметричной системы уравнений со 100 неизвестными требует выполнения примерно 830 000 умножений. При 600 умножениях в день оператор с помощью арифмометра выполнит такое количество вычислений только за 550 рабочих дней. Автоматическая же вычислительная машина со средним быстродействием, подобная установленной в Дармштадте, выполнит это умножение за два часа чистого операционного времени, а более быстродействующая машина (IBM-701) потребует для этого всего лишь 5 мин. К этому времени нужно добавить время на подготовку и ввод данных и регистрацию полученного решения, но и при этом экономия времени очевидна.

---

[1]) Этот метод впервые был предложен в 1939 г. Л. В. Канторовичем (Канторович Л. В., Математические методы организации и планирования производства, Изд. ЛГУ, 1939 г.). — *Прим. ред.*

Для решения систем линейных уравнений имеются также и моделирующие устройства. Однако они предназначены для решения небольших систем уравнений, в которых число неизвестных не превышает 20, и обладают невысокой точностью. Но поскольку именно системы уравнений, описывающие экономические задачи, часто требуют решения с большой точностью, моделирующие устройства можно использовать для этой цели только в отдельных случаях.

Вторая группа экономических задач имеет дело с *динамическими* процессами. Для их математической формулировки используются дифференциальные уравнения. Рассматриваемые переменные изменяются с течением времени непрерывно. Речь может идти, например, о переходном процессе в какой-либо небольшой подсистеме народного хозяйства, которая под воздействием возмущения переходит из существующего состояния равновесия в некоторое новое состояние равновесия, или об изменении во времени общеэкономических характеристик на основе какой-либо современной умозрительной модели (см. статью Фёля в настоящем сборнике, стр. 83). Встречающиеся здесь проблемы идентичны проблемам теории регулирования в технике. Правда, в экономике пока возможен только анализ, т. е. можно лишь стараться описать имеющиеся зависимости, между тем как теория регулирования позволяет широко воздействовать на конструкцию систем регулирования (*синтез* систем) и добиться наиболее благоприятного протекания процесса регулирования. Однако формулировки и там и тут одинаковы и расчетные методы теории регулирования можно непосредственно применить и к экономике.

Обычные математические методы, такие, как метод частотных характеристик, преобразование Лапласа, применение интеграла Дюамеля, интегральные уравнения и т. д. (см. статью Тишнера в этом сборнике, стр. 122), являются чрезвычайно плодотворными и по большей части быстро и легко приводят к цели. Правда, они применимы только к линейным дифференциальным уравнениям, а в экономике как раз часто встречаются существенно нелинейные процессы. В большинстве случаев

их нельзя линеаризовать, так как области изменения переменных очень велики. В этих случаях особенно полезными оказываются моделирующие устройства, тем более что не требуется особенно высокая точность, поскольку входные данные, функциональные зависимости, да и вся структура экономических систем регулирования задаются, по крайней мере в настоящее время, довольно приближенно.

В принципе для решения динамических задач можно использовать также и цифровые вычислительные машины. Но при этом мы должны заменить в дифференциальном уравнении производные отношениями конечных разностей и получить, таким образом, разностное уравнение. Однако в ряде случаев эти подготовительные преобразования сопряжены со значительной вычислительной работой, равно как и последующее составление программы для автоматической цифровой вычислительной машины. При использовании интегратора эти трудности отпадают, поскольку дифференциальные уравнения используются в их первоначальном виде. К тому же время, необходимое для решения на электронном интеграторе, существенно меньше, чем при использовании цифровой машины, несмотря на ее большое быстродействие. Кроме того, работа с моделирующим устройством более наглядна и понятна: влияние параметров можно проследить легко и быстро. Поэтому мы ограничимся здесь обсуждением только моделирующих устройств, поскольку они более пригодны для решения проблем регулирования экономики, чем цифровые машины.

ПРИНЦИП РАБОТЫ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Моделирующее устройство является физической системой, которая описывается теми же уравнениями, что и моделируемая система. Таким образом, моделирующее устройство является моделью первоначальной системы или ее уравнений. Между переменными в том и другом случае имеется соответствие, причем они связаны друг с другом с помощью масштабных коэффициентов.

Моделирующие устройства можно классифицировать исходя из различных точек зрения:

1. Классификация по назначению.

Большинство устройств, особенно современных, предназначено для решения обычных дифференциальных уравнений; они называются интеграторами. Однако с их помощью можно решать также алгебраические и трансцендентные уравнения и некоторые типы уравнений в частных производных. Некоторые устройства созданы специально для решения систем линейных или алгебраических уравнений. В настоящее время они, однако, уже не находят большого применения.

2. Классификация по типу решающего элемента.

Существуют механические, гидравлические и электрические элементы. Соответственно и переменными являются механические (угол, длина), гидравлические (давление, уровень жидкости) или электрические (напряжение, ток) величины. Часто применяется сочетание этих элементов. В современных устройствах преобладают, однако, электрические элементы ввиду их простоты и дешевизны, а также возможности получения высокой скорости работы.

3. Классификация по способу применения.

Аналогии (модели) могут создаваться двумя различными способами: непосредственным воспроизведением первоначальной системы в измененном масштабе с помощью вспомогательных элементов (гидравлических, механических или электрических) или с помощью соединяемых друг с другом решающих блоков.

ИЗОБРАЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ

Система, изображающая первоначальную систему, должна удовлетворять тем же уравнениям, но имеет другие размеры и часто также измененный масштаб времени. Принцип работы системы не зависит от способа

физической или технической реализации. Имеются модели, сохраняющие подобие оригиналу в мельчайших подробностях; из их поведения при возмущениях или изменениях характеристик непосредственно определяется поведение реального объекта. В технике регулирования это используется очень часто, поскольку модель меньше по размерам и дешевле, чем исследуемая система регулирования, а также часто отличается и бóльшим быстродействием. Иногда изготавливаются также модели отдельных узлов системы, которые исследуются либо отдельно, либо совместно с реальной системой.

Но, помимо этого, модель экономической системы регулирования часто впервые конкретизирует абстрактное представление, которое складывается у экономиста о том или ином процессе [9]. Моделируя, он превращает свою абстрактную модель в действительную: движение товаров и денег предстает, например, в виде движения реальных потоков воды. При этом можно непосредственно наблюдать предполагаемые зависимости и взаимные влияния и вносить различные усовершенствования. Таким образом, и экономист получает возможность перейти к экспериментам.

Трудность изготовления модели заключается в переходе от уравнения к модели. Возникает необходимость для каждого случая создавать новую модель. А для этого требуются определенные физические и технические знания. В случае механических или гидравлических моделей возникают также затруднения при их реальном изготовлении в связи с необходимыми затратами на оборудование. Внесение изменений в такие модели также сопряжено с определенными трудностями.

Более просто создать модель из пассивных электрических элементов. Схемы из сопротивлений, катушек индуктивности или конденсаторов и источников питания собирают таким образом, чтобы они описывались теми же уравнениями, что и реальная система. Если нам, например, нужно создать модель для уравнения колебаний

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t), \qquad (1)$$

то омическое сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор соединяются последовательно с источником питания, напряжение которого является функцией времени (фиг. 2). Уравнение этой электрической цепи будет иметь вид

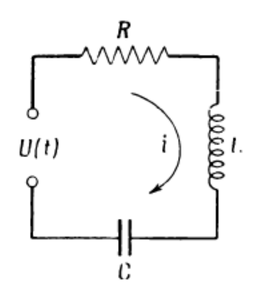
$$\sum U = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - U(t) = 0,$$

или, после дифференцирования,

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dU(t)}{dt}. \qquad (2)$$

Таким образом, ток i изображает переменную y, а постоянные коэффициенты a, b и c соответствуют элементам L, R и $1/C$, которые нужно выбрать соответствующим образом. Возмущающая функция $f(t)$ изображается источником напряжения $U(t)$, причем $U(t)$ должно быть выбрано так, чтобы имело место соотношение

$$U(t) = \int_0^t f(t)\,dt.$$



Фиг. 2. Моделирующая цепь из пассивных элементов для дифференциального уравнения $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$.

В случае сложных уравнений или систем уравнений получаются цепи из многих элементов, для создания которых требуется известный опыт. Если же схема установлена, то ее реализация осуществляется просто, так как электрические детали дешевы и недефицитны. В моделях можно также учитывать и нелинейности путем использования элементов с нелинейными характеристиками, однако достижимая при этом точность не особенно высока.

Этот метод моделирования широко используется в настоящее время прежде всего для линейных задач. В США имеются большие устройства (Network Analyzer — *расчетный стол*), содержащие сотни различных

пассивных элементов. С помощью таких устройств при сравнительно небольших затратах можно решать разнообразные задачи, включая и уравнения в частных производных.

МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЕШАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Другой метод создания моделей состоит в следующем: уравнения, описывающие реальную систему, разрешаются с помощью специальных решающих элементов, которые выполняют все необходимые вычислительные операции. Тем самым эти уравнения удовлетворяются, т. е. при изменении независимых переменных зависимые переменные, а следовательно, и искомое решение изменяются надлежащим образом. Для этого необходимо иметь устройства, которые могли бы выполнять такие математические действия, как сложение, вычитание, умножение, деление, интегрирование, дифференцирование и образование произвольных функций при непрерывно изменяющихся входных данных. Имеются такие устройства механического типа, в которых переменными служат углы или отрезки, и электрического типа, в которых роль переменного выполняет напряжение.

Рассмотрим в качестве простейшего примера работы с решающими элементами дифференциальное уравнение

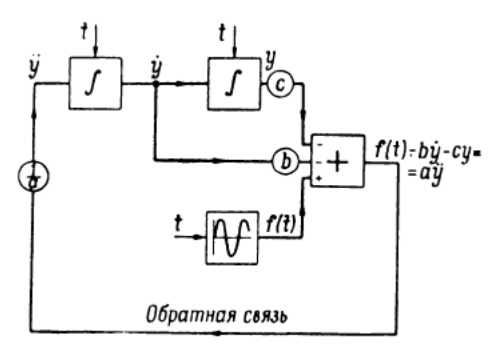
$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=f(t), \qquad (1a)$$

где $\dot{y}=dy/dt$. Чтобы избежать применения дифференцирующего устройства (обычно желательно исключить чувствительное к помехам дифференцирование, и это почти всегда удается), разрешим уравнение относительно высшей производной

$$a\ddot{y}=f(t)-b\dot{y}-cy. \qquad (3)$$

Схема соединения необходимых для решения решающих элементов, так называемая блок-схема, приведена на

фиг. 3. С помощью интеграторов обеспечивается связь между $\ddot{y}$, $\dot{y}$ и y (цепь интеграторов). Правая часть уравнения образуется суммированием величин $f(t)$, $-b\dot{y}$, $-cy$, что требует умножения $\dot{y}$ на коэффициент b и умножения y на коэффициент c. Таким образом, после умножения на $1/a$ получается вторая производная $\ddot{y}$. Она должна подаваться на вход цепи интеграторов. Тем самым все решающие элементы образуют замкнутый контур.



Фиг. 3. Модель дифференциального уравнения

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=f(t),$$

составленная из решающих блоков (блок-схема интегратора).

В этом находит отражение тот математический факт, что y в дифференциальном уравнении содержится только в неявном виде. Если бы потребовалось разрешить уравнение относительно y в явном виде, то схема должна была бы представлять собой незамкнутую цепь.

Идея соединения решающих элементов в замкнутый контур была предложена в 1876 г. В. Томсоном (лордом Кельвином [10]). Тогда она, конечно, не могла быть осуществлена. Лишь в 1914 г. Кнорр [11—13] построил на этом принципе в Германии небольшое устройство, а в 1928—1931 гг. в США Буш [4] сконструировал первое большое вычислительное устройство. По-английски это устройство называется «дифференциальным анализато-

ром», в Германии для него принято наименование интегратор.

Хотя работа с интегратором и требует большего числа приборов, чем при использовании цепей из пассивных элементов, преимущество ее состоит в более систематизированной методике и более простом составлении схемы соединений. Если некоторая задача на регулирование уже представлена в виде структурной схемы, то составление схемы соединений не требует больших усилий, поскольку структурная схема и схема соединений часто бывают совершенно тождественны. Основой обеих схем служит уравнение, которое необходимо решить, и обе они содержат лишь передающие звенья, не имеющие обратного действия. Отдельные звенья системы регулирования заменяются решающими элементами, которые имеют такую же переходную функцию или такую же частотную характеристику, что и заменяемые звенья. Для изображения сложных частотных характеристик также имеются готовые решающие элементы; если же такого элемента не окажется, то необходимо моделируемое звено расчленить на несколько более простых.

Эта непосредственная тождественность схем, систематичность метода работы и наглядность схемы решения являются основными причинами, по которым в настоящее время для решения дифференциальных уравнений и задач регулирования в подавляющем большинстве случаев применяют интеграторы, а не моделирующие цепи из пассивных элементов.

Другая причина состоит в следующем: в интеграторе все переменные и их производные выражаются с помощью какой-либо одной физической величины, например напряжения. Это позволяет весьма просто регистрировать решение: требуются измерительные приборы только одного типа, которые можно присоединять к любой точке интегратора для измерения соответствующей переменной. В случае же моделирующих цепей из пассивных элементов различные члены уравнения представлены различными элементами цепи, и поэтому для регистрации решения необходимо в зависимости от обстоятельств применять различные измерительные при-

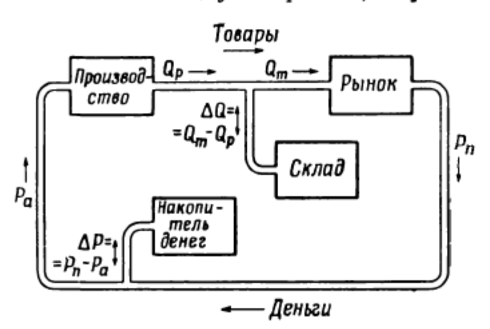
боры (амперметр, вольтметр, ваттметр и т. д.).

И наконец, в интеграторах особенно легко и точно можно учитывать нелинейности. В то время как в случае пассивных элементов мы вынуждены ограничиваться естественными нелинейными характеристиками элементов, с помощью которых должна быть приближенно представлена требуемая нелинейность, в интеграторах имеются устройства, которые могут ввести в решение любую произвольную функцию.

Различные возможности создания моделей мы постараемся теперь пояснить на примере из экономики.

МОДЕЛЬ СПРОС — ПРЕДЛОЖЕНИЕ — СКЛАД

Рассматриваемая здесь абстрактная модель взята из работы Морхауза, Штроца и Горвица [14]. Авторы рассматривают связь между спросом, предложением и



Фиг. 4. Диаграмма материального потока для модели спрос — предложение — склад (по Морхаузу).

складскими запасами. Блок-схема движения материальных потоков приведена на фиг. 4. Из производства исходит поток товаров Q_p, на рынок поступает поток товаров Q_m. Разность между ними $\Delta Q = Q_m - Q_p$ характеризует поступление на склад, если $Q_p > Q_m$, $\Delta Q < 0$, или изъятие со склада, если $Q_m > Q_p$, $\Delta Q > 0$. На рынке

товары превращаются в деньги, так что с рынка выходит поток денег P_n, который через накопитель денег поступает в производство. Поступающие туда деньги P_a снова превращаются в товары, и цепь оказывается, таким образом, замкнутой.

Деньги, поступающие с рынка, можно рассматривать как наличную покупательную способность, которая целиком должна превратиться в товары, иными словами, деньги, поступающие в производство, представляют издержки производства товаров Q_p. В состоянии равновесия вся покупательная способность поступает в производство, т. е.

$$P_n = P_a = P_0, \qquad \Delta P = 0.$$

В накопитель денег ничего не поступает и из него ничего не берется, его фонд равен нулю. Накопитель предназначен не для хранения денег (вклады в твердопроцентные бумаги, сбережения и т. п.), а для кратковременного поглощения излишней покупательной способности, возникающей при нарушении равновесия. В процессе восстановления равновесия накопитель выдает деньги обратно. Таким образом, в состоянии равновесия накопитель всегда пуст. Далее, в состоянии равновесия поток товаров из производства равен потоку товаров, поступающих на рынок, так что имеют место равенства

$$Q_p = Q_m = Q_0, \qquad \Delta Q = 0.$$

Ни на склад, ни из склада ничего не поступает. Складские запасы остаются постоянными, сохраняясь на заданном уровне L_0.

Если в любом месте системы возникает возмущение, например скачкообразно увеличивается покупательная способность, то вся система стремится к некоторому новому состоянию равновесия. При внезапном увеличении покупательной способности на рынке может быть реализовано большее количество товаров. Однако ввиду инерционности рынка поток товаров Q_m увеличится не скачком, а будет возрастать постепенно. Прежде всего товары будут поступать со склада, который должен содержать готовую продукцию и может их поставлять

практически без задержки. Затем постепенно **будет** увеличиваться выпуск продукции для увеличения сократившихся складских запасов до прежнего уровня. Из-за инерции рынка и производства на время будет происходить перерегулирование, и система будет медленно переходить к новому состоянию равновесия, испытывая колебания около него. Избыточная покупательная способность сократится, поток товаров увеличится, и новые равновесные значения потока денег и товаров P_1 и Q_1 будут выше исходных величин P_0 и Q_0.

Можно отбросить представление о денежных потоках и рассматривать величины P_n и P_a как функции стоимости; тогда P_n является спросом, P_a — предложением, а разность ΔP есть постепенно исчезающее превышение спроса над предложением. В этом случае введение накопителя денег оказывается излишним.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАВИСИМОСТЕЙ

Связь товаров и денег можно описать с помощью функций спроса и предложения. Обе функции для простоты считаются линейными:

$$P_n = \alpha_1 - \beta_1 Q_m, \tag{4}$$

$$P_a = \alpha_2 + \beta_2 Q_p. \tag{5}$$

Эти уравнения представляют материальные связи. Спрос тем выше, чем меньше количество товаров, поступающих на рынок, причем α_1 характеризует верхний предел при $Q_m = 0$. Наоборот, предложение растет с увеличением продукции, причем α_2 означает основные затраты изготовителя. Множители β_1 и β_2 являются заданными коэффциентами.

Однако с помощью одних только уравнений (4) и (5) нельзя полностью описать процесс. Необходимо еще установить зависимости, которые характеризуют способы воздействия на потоки товаров Q_m и Q_p и учитывают инерцию рынка и производства. Это сигнальные уравне-

ния (уравнения потоков информации). В данном случае принимается, что складской запас

$$P_L = L_0 - \frac{1}{\gamma}\int_0^t (Q_m - Q_p)\,dt$$

существенным образом способствует регулированию. А именно, производство стремится поддерживать на некотором определенном уровне L_0 неизменные складские запасы. Таким образом, как только склады пустеют, производство увеличивает выпуск продукции и сокращает поток товаров на рынок. С другой стороны, производство при повышении спроса увеличивает поставки на рынок и ограничивает выпуск продукции при превышении предложения над спросом.

Инерционность рынка и производства мы учтем следующим образом: пусть при внезапном увеличении спроса поток товаров на рынок увеличивается не скачкообразно, а линейно нарастает с крутизной, пропорциональной возмущению. Таким образом, выходной сигнал блока «рынок» равен интегралу от входного сигнала, или, что то же самое, входной сигнал является производной от выходного сигнала: блок имеет интегральную характеристику передачи. Инерционность производства должна быть аналогичного типа. Поэтому сигнальные уравнения нужно составлять не для потоков товаров Q_m и Q_p, а для их производных по времени $dQ_m/dt = \dot{Q}_m$ и $dQ_p/dt = \dot{Q}_p$. Их можно сформулировать следующим образом:

$$\lambda_1 \dot{Q}_m = P_n - P_0 - \frac{1}{\gamma}\int_0^t (Q_m - Q_p)\,dt - P_A, \qquad (6)$$

$$\lambda_2 \dot{Q}_p = -(P_a - P_0) + \frac{1}{\gamma}\int_0^t (Q_m - Q_p)\,dt + P_A. \qquad (7)$$

Левые части этих уравнений изображают инерцию рынка и производства. Стоящая в правой части уравнения рынка разность $P_n - P_0$, т. е. избыток спроса над

исходной величиной, служит сигналом для повышения $\dot{Q}_m$, а отклонение складских запасов от требуемой величины — сигналом для уменьшения Q_m. Соответственно в уравнении производства уменьшение складских запасов действует на производство положительно, а увеличение предложения — отрицательно, задерживая рост производства.

В обоих уравнениях содержится произвольная функция P_A, так называемая функция наполнения для склада. Она описывает тенденцию промышленности поддерживать складские запасы на неизменном уровне, несмотря на увеличение денежного и товарного обращения. При отсутствии функции наполнения новое состояние равновесия ($\dot{Q}_m = \dot{Q}_p = 0$) может быть достигнуто только тогда, когда уменьшение складских запасов равно разности $P_1 - P_0$, как это сразу видно из уравнений (6) и (7):

$$0 = P_1 - P_0 - \frac{1}{\gamma_0} \int_0^t (Q_m - Q_p)\, dt.$$

Для того чтобы интеграл был равен нулю, функция P_A в новом состоянии равновесия должна быть равна $P_1 - P_0$. Вследствие этого на функцию наполнения накладываются следующие условия:

$$P_A = 0 \quad \text{для} \quad t = 0,$$

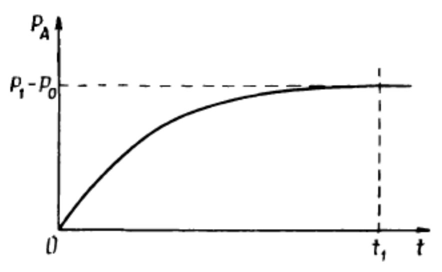
$$P_A \to P_1 - P_0 \quad \text{для} \quad t \to t_1,$$

где t_1 — время, необходимое для достижения нового состояния равновесия; P_1 — новое равновесное значение P_n и P_a; P_0 — старое равновесное значение (исходное состояние до возмущения). Теоретически $t_1 = \infty$; однако достаточно так выбрать t_1, чтобы значение функции при t_1 отличалось от конечного всего на несколько процентов.

Простейшей функцией, удовлетворяющей этим условиям, является функция насыщения (фиг. 5)

$$P_A = (P_1 - P_0)(1 - e^{-\mu t}).$$

При этом μ выбирается так, чтобы выполнялось условие $e^{-\mu t_1} \ll 1$. Эта функция будет использована в дальнейших вычислениях, и при решении задач выяснится, что форма кривой функции наполнения почти не оказывает влияния на изменение Q_m и Q_p.



Фиг. 5. Временной график функции наполнения $P_A(t)$.

В данном рассмотрении, точно так же как и в теории регулирования, представляется целесообразным проводить расчеты только с отклонениями от некоторого начального состояния. Для рассматриваемой задачи начальным состоянием является состояние равновесия

$$P_n = P_a = P_0; \quad Q_m = Q_p = Q_0 \quad \text{для} \quad t = 0.$$

Новые переменные определяются следующим образом:

$$x_m = Q_m - Q_0,$$
$$x_p = Q_p - Q_0,$$
$$y_n = P_n - P_0,$$
$$y_a = P_a - P_0.$$

Подстановка этих зависимостей в уравнения (4)—(7) дает

$$y_n = -\beta_1 x_m, \tag{8}$$

$$y_a = \beta_2 x_p, \tag{9}$$

$$\lambda_1 \dot{x}_m = y_n - \frac{1}{\gamma} \int_0^t (x_m - x_p)\, dt - y_1 (1 - e^{-\mu t}), \tag{10}$$

$$\lambda_2\dot{x}_p = -y_a + \frac{1}{\gamma}\int_0^t (x_m - x_p)\,dt + y_1(1 - e^{-\mu t}). \quad (11)$$

Теперь мы имеем для всех функций нулевые начальные условия, следовательно:

$$\text{при} \quad t = 0 \qquad x_m = x_p = y_n = y_a = 0.$$

Для исследования поведения системы наложим на y_n некоторое постоянное возмущение z. Тогда уравнение (8) окончательно приобретет вид

$$y_n = z - \beta_1 x_m. \quad (12)$$

Остальные уравнения остаются прежними. Требуется определить изменение во времени переменных x_m, x_p, y_n и y_a, вызванное возмущением.

В дальнейшем мы укажем различные возможности создания моделей подобного типа. Однако прежде необходимо разъяснить структурную схему нашей системы. Одновременно с этим мы установим связь с теорией регулирования, в которой такой способ представления широко используется.

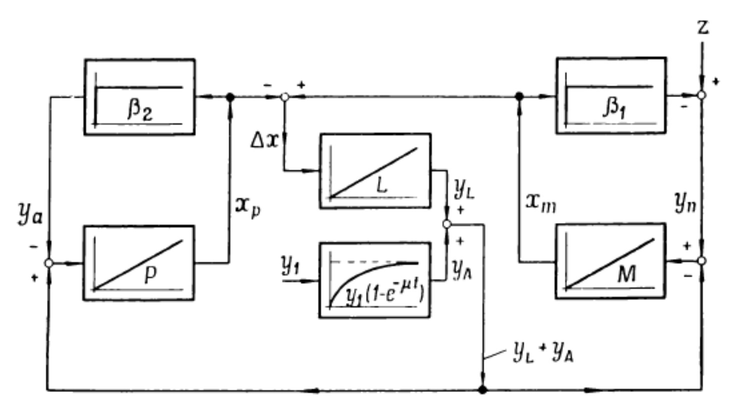
СТРУКТУРНАЯ СХЕМА МОДЕЛИ СПРОС — ПРЕДЛОЖЕНИЕ — СКЛАД

Структурная схема, изображенная на фиг. 6, дает наглядное изображение абстрактной модели, математически описываемой уравнениями (9)—(12). Сигналы проходят только в направлении, указанном стрелками. Здесь нет никакой связи с материальным потоком. Черные кружки означают разветвление сигнала без изменения его величины, светлыми кружками обозначено сложение или вычитание сигналов. Оба левых блока изображают производство, правые блоки — рынок, средние — склад и функцию наполнения. Оба верхних блока с линейной переходной функцией представляют уравнения (9) и (12). Интегрирующие блоки P и M имеют в качестве

входного сигнала правые части уравнений (10) или (11). Их выходными сигналами являются x_p или x_m. Блок L (склад) интегрирует входной сигнал $\Delta x = x_m - x_p$; его выходной сигнал определяется уравнением

$$y_L = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \Delta x \, dt.$$

Функция наполнения y_A является выходным сигналом некоторого блока, переходная функция которого



Фиг. 6. Структурная схема модели спрос — предложение — склад

равна $1 - e^{-\mu t}$, что соответствует частотной характеристике вида $1 \Big/ \left(1 + \frac{p}{\mu}\right)$. Поскольку входным сигналом этого блока является y_1, то на его выходе действительно образуется функция $y_A = y_1 (1 - e^{-\mu t})$.

Новое состояние равновесия должно быть вычислено до начала процесса решения и введено в машину. Из условий равновесия

$$y_1 = z - \beta_1 x_1,$$

$$y_1 = \beta_2 x_1$$

получаем

$$y_1 = \frac{z}{1 + \beta_1/\beta_2}.$$

Однако вместо y_1 в качестве входного сигнала можно также использовать величины y_n или y_a, поскольку при достижении нового состояния равновесия они переходят в y_1.

Таким образом, потоком товаров управляют три сигнала:

спрос: y_n,

предложение: y_a,

функция складского запаса: $y_L + y_A$.

Функция складского запаса оказывает влияние как на рынок, так и на производство. К этой структурной схеме можно применить обычные методы решения, поскольку здесь встречаются только линейные операции. Однако мы укажем и методы решения с помощью вычислительных устройств. Эти методы легко позволяют учитывать нелинейности (например, нелинейность функций спроса и предложения), но ради простоты и наглядности мы сохраним линейную модель Морхауза.

ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ МОДЕЛИ СПРОС — ПРЕДЛОЖЕНИЕ — СБЫТ

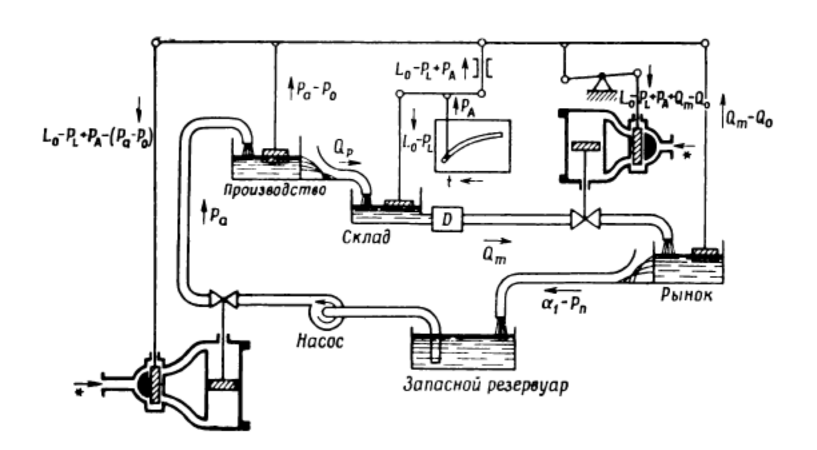
На фиг. 7 изображена гидравлическая модель. Кругооборот товар — деньги заменен кругооборотом воды, которая приводится в движение насосом. Расход воды, т. е. ее количество, протекающее в единицу времени, соответствует потоку товаров или денег. Здесь мы имеем дело не с отклонениями величин, а с их абсолютными значениями, так что вода течет и при состоянии равновесия.

В резервуар, изображающий производство, вливается поток денег P_a. Из этого резервуара поток Q_p выходит через боковую щель, которая устроена так, что

Q_p пропорционально уровню воды в резервуаре h_p, т. е. $Q_p = \rho h_p$. Так как, далее, имеет место равенство $(P_a - Q_p)\,dt = F_p\,dh_p$, где F_p — площадь резервуара, можно написать

$$P_a = Q_p + \frac{F_p}{\rho}\dot{Q}_p.$$

Мы видим, что пропорциональность P_a и Q_p выдерживается тем лучше, чем меньше площадь резервуара и



Фиг. 7. Гидравлический аналог модели спрос — предложение — склад.

Знаком * обозначена подача масла под давлением.

чем медленнее происходит изменение Q_p. Приближенно величина h_p также пропорциональна P_a, так что уровень воды можно использовать для измерения P_a. Это осуществляется с помощью поплавка, перемещающего систему рычагов, на которую, кроме того, действует еще сумма $P_L + P_A$. Величина P_L также измеряется с помощью поплавка в долях уровня воды в резервуаре,

изображающем склад. При этом имеет место соотношение

$$h_L = h_0 - \frac{1}{F_L}\int_0^t (Q_m - Q_p)\,dt \equiv P_L,$$

причем количество вытекающей воды Q_m зависит не от уровня воды, а от установки следующего клапана. Таким образом, непосредственно измеряется интеграл.

Для введения функции наполнения P_A можно использовать, например, подвижный шаблон. С помощью такого шаблона, вмонтированного в какой-либо точке системы рычагов, можно легко реализовать нелинейность.

В рассматриваемом случае система рычагов передает величины, пропорциональные сигналам, на два интегрирующих исполнительных элемента, которые перемещают соответствующие клапаны по P_A и Q_m. Малое постоянное смещение золотника, связанного с системой рычагов, из среднего положения позволяет поступающему извне под давлением маслу пройти в цилиндр и оказать воздействие на поршень, заставляя его двигаться с постоянной скоростью. С поршнем связан клапан, перемещение которого является, таким образом, интегралом от входного сигнала, поступающего на золотник. Для того чтобы поток жидкости был всегда пропорционален перемещению золотника, нужно обеспечить постоянство давления перед клапаном независимо от количества протекающей жидкости. В цепи P_a это можно обеспечить регулируемым насосом. В цепи Q_m также необходимо поддерживать постоянство давления, так как уровень воды в резервуаре, изображающем склад, а следовательно, и давление в трубопроводе колеблются в соответствии с изменениями складских запасов.

В данной схеме постоянство давления обеспечивается блоком D (регулятор давления). Измерение Q_m производится точно так же, как и измерение P_a. С помощью системы рычагов Q_m связывается с $P_L + P_A$ и поступает на исполнительный элемент по Q_m.

Работа клапанов описывается следующими уравнениями:

$$Q_m = -c_1 \int_0^t [L_0 - P_L + P_A + \beta_1 (Q_m - Q_0)]\, dt,$$

$$P_a = c_2 \int_0^t [L_0 - P_L + P_A - (P_a - P_0)]\, dt.$$

Эти уравнения идентичны уравнениям (6) и (7), что сразу становится очевидным, если оба уравнения один раз продифференцировать, вместо $L_0 - P_L$ подставить $(1/\gamma) \int (Q_m - Q_p)\, dt$, приравнять $c_1 = 1/\lambda$, а $c_2 = \beta_2/\lambda_2$ и использовать уравнения (4) и (5).

Нарушение равновесия из-за внезапного увеличения спроса можно имитировать изъятием некоторого количества воды из резервуара, изображающего рынок, из которого вытекает поток P_n. При этом можно непосредственно наблюдать изменение всех переменных и колебательный процесс перехода к новому состоянию равновесия.

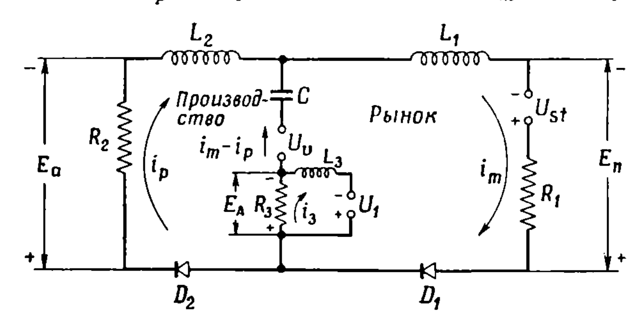
Эта модель изображает некоторую систему регулирования и является, конечно, только одной из многих возможных моделей; ее техническая реализация будет, несомненно, выглядеть иначе. Она нужна была только для иллюстрации основных идей. Но в любом случае технические затраты на создание подобной модели довольно велики.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Гораздо целесообразнее применить для моделирования электрические детали. На фиг. 8 приведена схема, моделирующая уравнения (9)—(12), которая заимствована нами из работы Морхауза [14]. Это двухконтурная цепь, причем левый контур изображает производство, а правый — рынок. В средней ветви находятся конденсатор, выполняющий роль склада, и вспомогательная

схема из сопротивления, катушки индуктивности и источника питания U_1, имитирующая функцию наполнения. В этом случае непосредственная наглядная связь с реальной задачей исчезает, аналогия устанавливается лишь через уравнения.

В левой ветви в указанном на схеме направлении протекает ток i_p, в правой ветви — ток i_m, а в средней



Фиг. 8. Электрический аналог модели спрос — предложение — склад.

части разность токов $i_m - i_p$. Направления токов определяются диодами D_1 и D_2, протекание токов в обратном направлении невозможно. Падения напряжения в правой и левой ветвях определяются соответственно выражениями

$$E_n = U_{st} - R_1 i_m,$$
$$E_a = R_2 i_p.$$

Сумма напряжений в каждом контуре должна равняться нулю, т. е.

$$E_n = L_1 \frac{di_m}{dt} + \frac{1}{C} \int (i_m - i_p)\, dt + E_A,$$

$$E_a = -L_2 \frac{di_p}{dt} + \frac{1}{C} \int (i_m - i_p)\, dt + E_A.$$

Падением напряжения $R_3(i_m - i_p)$ мы пренебрегаем, что при соответствующем выборе параметров схемы допустимо. Не учитывается также напряжение U_v. Оно

поддерживает на конденсаторе некоторый постоянный заряд q_0, причем $U_v + (q_0/C) = 0$. Заряд q_0, который был на конденсаторе до начала решения, является аналогом складских запасов L_0. Этот заряд никогда не должен уменьшаться.

Уравнения цепи почленно соответствуют уравнениям (9)—(12), если принять

$$E_A = U_1(1 - e^{-\mu t}).$$

Это требуемое изменение напряжения устанавливается с помощью так называемого вспомогательного дифференциального уравнения. А именно, функция E_A должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\mu}\frac{dE_A}{dt} + E_A = U_1.$$

Уравнение вспомогательной цепи будет иметь вид

$$U_1 = i_3R_3 + L_3\frac{di_3}{dt}.$$

При $E_A = i_3R_3$ получаем

$$\frac{L_3}{R_3}\frac{dE_A}{dt} + E_A = U_1.$$

Итак, необходимо приравнять $R_3/L_3 = \mu$ и получить, таким образом, требуемую функцию наполнения. Аналогия между электрической цепью и реальной системой характеризуется следующим: поток товаров x соответствует электрическому току i, деньги y — напряжению E. Конечно, электрическая схема не похожа на кругооборот товар — деньги (см. фиг. 4). Хотя электрическая цепь также замкнута, i означает только поток товаров, а поток товаров замыкается не сам на себя, а через поток денег. Отсутствует также и сходство со структурной схемой фиг. 6: если на фиг. 6 замкнутая цепь состоит из цепи x и цепи y, разделенных блоками, не имеющими обратной связи, то в электрической цепи течет только ток i, а отдельные элементы отнюдь нельзя считать не имеющими обратного действия.

Поскольку рассматриваются только отклонения, то система вначале должна быть обесточена, т. е. U_{st} — выключено. После включения напряжения возмущения U_{st} можно на электронно-лучевом осциллографе проследить изменение напряжений во времени.

МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННОГО ИНТЕГРАТОРА

Уравнения (9)—(12) моделируются с помощью решающих элементов интегратора. Проще всего это сделать, если использовать уравнения (10) и (11), в которые подставлены выражения (9) и (12):

$$\lambda_1 \dot{x}_m = z - \beta_1 x_m - \frac{1}{\gamma}\int_0^t (x_m - x_p)\,dt - y_1(1 - e^{-\mu t}),$$

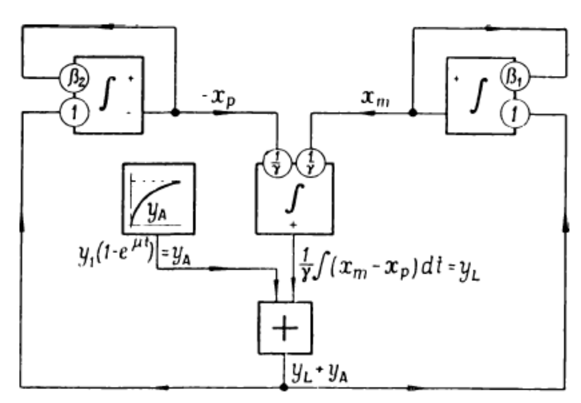
$$\lambda_2 \dot{x}_p = -\beta_2 x_p + \frac{1}{\gamma}\int_0^t (x_m - x_p)\,dt + y_1(1 - e^{-\mu t}).$$

Схема соединений, соответствующая этим уравнениям, приведена на фиг. 9. Решающие элементы изображены в виде прямоугольников, интегратор обозначен знаком $\int$, сумматор знаком $+$, а генератор функции — некоторой кривой. Интегратор решает уравнение

$$x_a(t) = \pm K_1 \int_0^t [c_1 x_{e1}(t) + c_2 x_{e2}(t)]\,dt,$$

где x_e — входное, а x_a — выходное напряжение. Таким образом, он интегрирует сумму двух функций, коэффициенты которых можно менять. Переменной интегрирования является время; результат можно получить как в отрицательной, так и в положительной форме. Значения постоянных множителей c_1 и c_2 указаны в кружках на входе интеграторов. Знаки на выходе интеграторов указывают, берется ли $+x_a(t)$ или $-x_a(t)$. На

соответствующих соединительных линиях проставлены проходящие по ним переменные, роль которых выполняет напряжение, так что легко проверить соответствие между схемой соединений и уравнениями. С отрицательного выхода правого верхнего интегратора снимается функция $+x_m(t)$, так как знаки обоих входных сигналов противоположны. Возмущение z подается (также с обратным знаком) в виде постоянного напряжения на



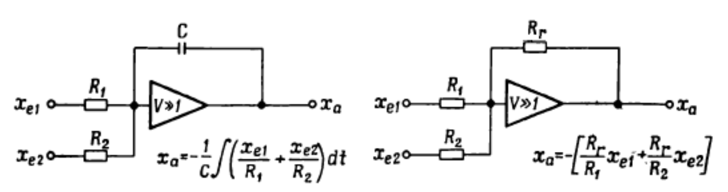
Фиг. 9. Структурная схема электронного интегратора для модели спрос — предложение — склад.

вход интегратора по x_m. С помощью электронно-лучевого осциллографа можно наблюдать изменение любой переменной в цепи.

Сравнение схемы соединений со структурной схемой фиг. 6 обнаруживает между ними полное соответствие. В левом интеграторе объединены блоки P, β_2 и суммирующая точка, а в правом — M, β_1 и две суммирующие точки. Блок, изображающий склад, представлен отдельным интегратором, который выдает функцию складских запасов. Сложение y_L и y_A производится в отдельном сумматоре. Решающие элементы являются звеньями с определенной временной характеристикой передачи, не имеющие обратного действия. Звенья с пропорциональной характеристикой передачи отсутствуют, поскольку они по существу только изменяют масштаб.

ПРИНЦИП РАБОТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ ИНТЕГРАТОРОВ

Типичная схема линейного решающего устройства приведена на фиг. 10, где показаны интегратор-сумматор и сумматор. В ее основе лежит усилитель, коэффициент усиления которого должен быть как можно больше. Изменяющиеся во времени входные напряжения x_{e1} и x_{e2} приложены к сопротивлениям R_1 и R_2. Поскольку потенциал входа усилителя практически можно



Фиг. 10. Принципиальные схемы решающих элементов электронного интегратора.

считать равным нулю, то оба входных напряжения полностью падают на сопротивлениях. Возникающий при этом ток равен

$$i_1 = \frac{x_{e1}}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{x_{e2}}{R_2}.$$

Поскольку вход усилителя присоединен к сетке лампы, то эти токи не могут пройти в усилитель. Поэтому они текут по цепи, соединяющей вход и выход усилителя. В случае интегратора в этой цепи расположен конденсатор. Падение напряжения в этой цепи равно

$$x_a = -\frac{1}{C}\int_0^t (i_1 + i_2)\, dt.$$

Выходное напряжение x_a измеряется по отношению к потенциалу входа или практически по отношению к нулевому потенциалу. Если подставить значения i_1 и i_2, получим

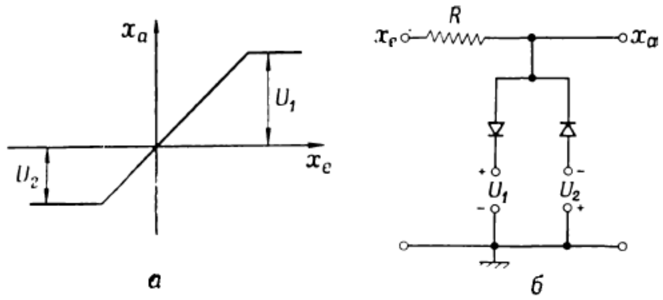
$$x_a = -\frac{1}{C}\int_0^t \left[\frac{1}{R_1} x_{e1} + \frac{1}{R_2} x_{e2}\right] dt.$$

Для сумматора, у которого в цепи, соединяющей вход с выходом, имеется омическое сопротивление R_r, соответственно получаем

$$x_a = -R_r\left[\frac{1}{R_1}x_{e1} + \frac{1}{R_e}x_{e2}\right].$$

Частный случай $R_2 = \infty$, $R_r = R_1$ дает перемену знака.

Поскольку в упомянутой цепи сигнал направлен от выхода к входу, то ее называют также цепью обратной связи. Решающий элемент является по существу усилителем с обратной связью. С помощью подобной схемы



Фиг. 11. Реализация нелинейности в электронном интеграторе.

а — характеристика ограничения с помощью отсечки; *б* — диодная схема реализующая эту характеристику.

можно производить также дифференцирование или смешанные линейные вычислительные операции. Более подробные сведения можно почерпнуть из работы [15] [1]).

Нелинейные вычислительные операции осуществить несколько сложнее. Однако в настоящее время имеется большое число различных устройств, которые с достаточной точностью производят умножение двух переменных и генерируют произвольную функцию, зависящую от времени или какой-либо другой переменной. Подобные устройства часто выполняются на электронно-лучевых трубках. Для создания отдельных типичных нели-

[1]) См. также Коган Б. Я., Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем регулирования, Физматгиз, 1959. — *Прим. ред.*

нейностей, которые часто встречаются в теории регулирования и экономике и могут быть апроксимированы отрезками прямых, имеются простые диодные устройства. Например, ограничение функции в соответствии с характеристикой, приведенной на фиг. 11, *а*, осуществляется диодной схемой фиг. 11, *б* [15]. Напряжения U_1 и U_2 вводятся в ветви с диодами. Пока x_a остается положительным и меньшим U_1, ни в одной из диодных ветвей ток не течет, так как диоды проводят только в направлении, указанном стрелками. В этом случае $x_a(t)$ пропорциональна $x_e(t)$. Как только установится равенство $x_a = U_1$, при дальнейшем небольшом повышении x_a через левый диод на землю потечет ток, который вызовет на сопритвлении R такое падение напряжения, что для всех значений x_e, больших U_1, будет выполняться равенство $x_a = U_1$. При отрицательных x_a аналогичный процесс будет происходить в правой диодной ветви.

Введение чистого временнóго запаздывания в электронных интеграторах сопряжено с большими трудностями. Если это выполняется только с помощью решающих элементов, то необходимо прибегнуть к приближенным дифференциальным уравнениям; в противном случае необходимо использовать специальные элементы (искусственные линии задержки). При решении с небольшими скоростями можно подлежащие задержке переменные записывать на магнитной ленте и вновь вводить их через время запаздывания T_t.

Скорость решения в электронных интеграторах изменяется в очень широких пределах. Самые быстродействующие устройства повторяют решение 50 раз в секунду, так что его можно наблюдать на экране осциллографа. Сам процесс решения занимает при этом только 0,01 сек., еще 0,01 сек. требуется для возвращения интегратора в исходное состояние для повторения решения, т. е. для повторной установки начальных значений. Это должно быть выполнено очень точно, чтобы решения накладывались на экране осциллографа и давали четкое изображение.

Такие устройства называются вычислительными устройствами с *периодизатором.* Их основное преиму-

щество состоит в том, что легко проследить влияние коэффициентов или начальных условий, поскольку при непрерывном изменении соответствующей величины (осуществляемом, например, путем вращения движка потенциометра) на экране осциллографа можно наблюдать непрерывное изменение решения. При помощи этого метода легко путем проб подбирать граничные условия.

С помощью интегратора с периодизатором трудно технически реализовать нелинейные операции. Однако в настоящее время возможно выполнять умножение и генерировать функций с точностью порядка 1%, что достаточно для большинства задач.

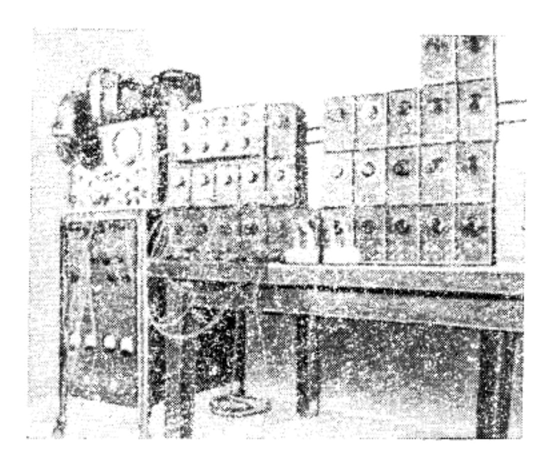
Интеграторы другого типа имеют время решения порядка нескольких минут. На них легко осуществляются нелинейные операции, поскольку можно использовать механические блоки, в частности линейные или функциональные потенциометры, движки которых перемещаются с помощью серводвигателя в функции времени или в соответствии с какой-либо другой функцией. Эти блоки являются очень точными (как правило, ошибка менее 0,1%). В качестве регистрирующих приборов могут быть использованы самописцы.

Трудности при использовании медленных решающих устройств состоят в том, что постоянные времени решающих усилителей должны быть очень большими и вследствие этого уход нуля может стать значительным.

Многие интеграторы имеют регулируемый масштаб времени; они могут работать как с периодизацией решения, так и в медленном режиме. Это особенно важно при решении задач регулирования. Часто бывает необходимо быстро просмотреть поведение некоторой системы при изменении коэффициентов, иногда же желательно использовать интегратор как часть реального регулятора; при этом он должен работать с временны́м масштабом 1 : 1 (т. е. в реальном времени). В этом случае интегратор считается моделью, поскольку он воспроизводит некоторую часть системы регулирования.

Большинство имеющихся в продаже устройств работает с регулируемым масштабом времени. В США имеется ряд фирм, которые выпускают серийно как от-

дельные решающие элементы, так и интеграторы. На фиг. 12—15 приведены некоторые типичные устройства. Решающие элементы выпускаются, например, бостонской фирмой «Филбрик». Для решения уравнений эти элементы соединяются между собой при помощи кабелей (фиг. 12). Кроме линейных, имеются также практически все нелинейные решающие элементы. Они могут работать как с периодизацией решения, так и в медленном режиме.

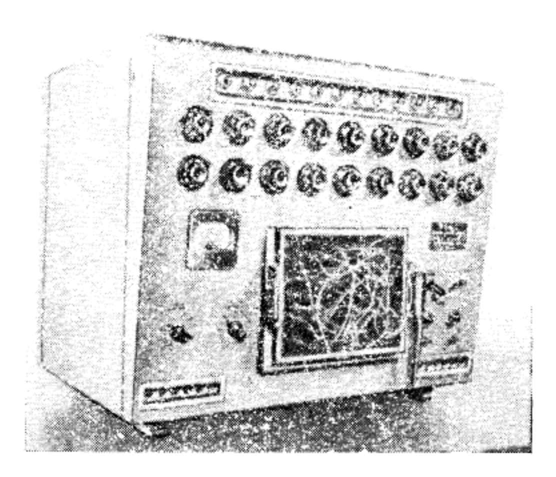


Фиг. 12. Электронный интегратор, собранный из решающих элементов фирмы „Филбрик".

На фиг. 13 приведено вполне современное линейное вычислительное устройство. Это, созданное фирмой «Ривс» (Нью-Йорк) устройство имеет 12 решающих усилителей, которые могут быть использованы по желанию либо как интеграторы, либо как сумматоры. В центре расположено наборное поле, на котором производится соединение усилителей в соответствии с решаемым уравнением, выше расположены ручки установки коэффициентов и начальных условий. Прибор работает как в периодическом, так и в медленном режимах. Поставляются нелинейные приставки. Из других блоков, вы-

пускаемых этой фирмой, можно конструировать решающие устройства любых размеров.

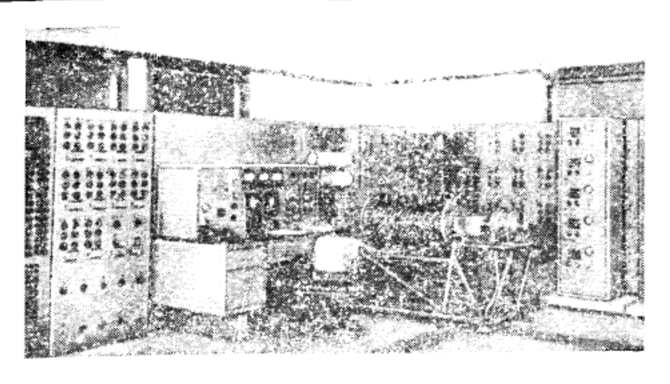
Рядом исследовательских институтов разработано значительное количество собственных решающих устройств. На фиг. 14 показано устройство Калифорнийского технологического института (г. Пасадена, Кали-



Фиг. 13. Электронный настольный интегратор С-301 фирмы „Ривс" (Нью-Йорк).

форния). Это большое устройство содержит как пассивные элементы для создания моделей с помощью электрических цепей, так и решающие усилители, используемые в качестве решающих элементов. Оба метода можно комбинировать. Особенно ценны нелинейные решающие элементы, представленные в большом количестве (10 множительных устройств, свыше 40 функциональных преобразователей).

На фиг. 15 представлено моделирующее устройство, работающее только в реальном времени, которое предназначено для моделирования поведения самолета в воздухе. Это устройство выпускается фирмой «SEA» (Париж).



Фиг. 14. Крупная вычислительная установка Калифорнийского технологического института (г. Пасадена).



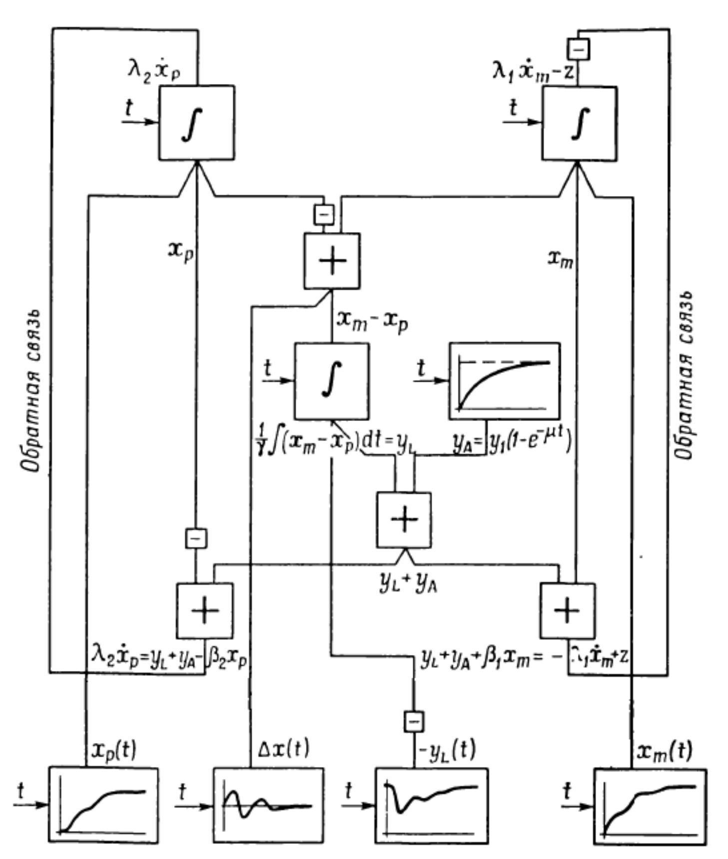
Фиг. 15. Французская установка для моделирования поведения самолета в воздухе фирмы „SEA“ (Париж).

В ФРГ в настоящее время еще нет электронных интеграторов. Поэтому приводимые здесь результаты исследования экономической модели получены с помощью механического интегратора.

РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАТОРА IPM-Ott

Схема соединений интегратора IPM-Ott (фиг. 16) по существу идентична схеме для электронного интегратора. Поскольку интегрирующий блок может выполнять

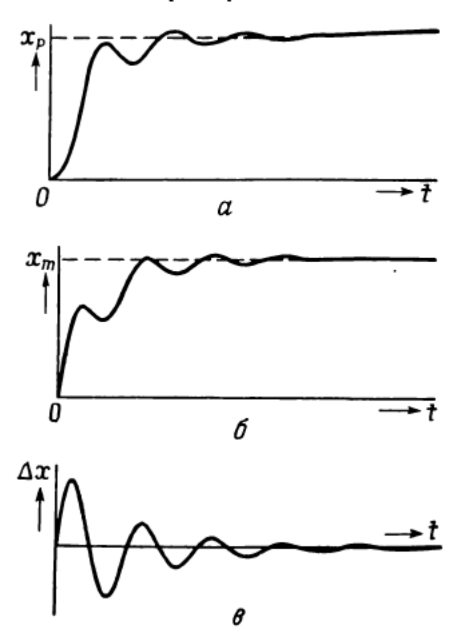
15 Зак. 2575.



Фиг. 16. Структурная схема интегратора IPM-Ott для модели спрос — предложение — склад.

только решение типа $x_a = c_1 \int x_e \, dt$, на входе блока необходимо предусмотреть дополнительное устройство для суммирования входных величин. Переменные интегрирования в механических устройствах могут изменяться от блока к блоку и также быть функциями какой-либо другой переменной. Поэтому они выписаны на

схеме отдельно для каждого интегратора, хотя в данном случае все они пропорциональны времени. Умножение на постоянный коэффициент отдельно не выделяется, поскольку в этом интеграторе оно с помощью зубчатых



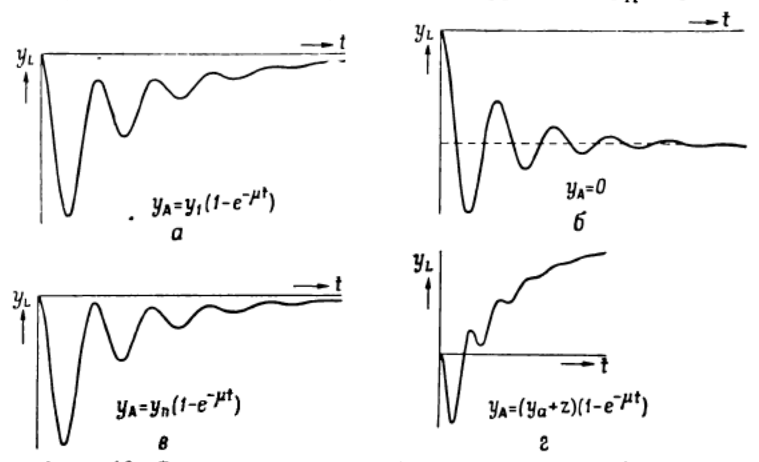
Фиг. 17. Кривые, полученные на интеграторе IPM-Ott для модели спрос — предложение — склад.

а — поток товаров из производства $x_p(t)$; *б* — поток товаров на рынок $x_m(t)$; *в* — изменение складских запасов $\Delta x = x_m - x_p$.

колес может выполняться во всех блоках. Результаты записываются в виде кривых одновременно четырьмя специальными самописцами. Интересующими нас величинами являются: поток товаров из производства x_p, рыночный поток товаров x_m, изменение складских запасов Δx и наличность запасов y_L. Так как спрос y_n и предложение y_a пропорциональны x_m или x_p, то нет

нужды их регистрировать. Переменные снимаются с тех точек цепи счетной машины, где они выступают в виде выходных величин решающих элементов.

Полученные кривые представлены на фиг. 17 и 18. Были исследованы четыре случая для различных значений функции наполнения. При этом выяснилось, что, несмотря на совершенно различные функции y_A, кривые



Фиг. 18. Складские запасы $y_L(t)$ при различных функциях наполнения $y_A(t)$.

$x_m(t)$ и $x_p(t)$ практически одинаковы; влияние функции наполнения является минимальным. Изменения складских запасов также мало отличаются друг от друга. Поэтому эти три величины на фиг. 17 приведены только для случая $y_A = y_1(1 - e^{-\mu t})$.

Однако вид и величина функции наполнения оказывают существенное влияние на складские запасы. А именно, $y_L(t)$ колеблется относительно некоторого среднего значения, соответствующего функции наполнения, сдвинутой вниз на величину y_1. На фиг. 18 приведены изменения складских запасов для четырех случаев

(а) $y_A = y_1(1 - e^{-\mu t})$; (б) $y_A = 0$;

(в) $y_A = y_n(1 - e^{-\mu t})$; (г) $y_A = (y_a + z)(1 - e^{-\mu t})$.

В случаях «а» и «в» после прекращения действия возмущения складские запасы возвращаются к прежнему состоянию. Случай «б» ведет к уменьшению запасов на y_1, а случай «г» — к увеличению их на величину z. Эти четыре случая, по-видимому, показывают, что для поведения x_m и x_p безразлично, какая взята функция наполнения.

Ясно виден колебательный процесс перехода к новому состоянию равновесия. Кривая решения $x_m(t)$ начинается с конечным наклоном, поскольку при внезапном повышении спроса сейчас же начинается увеличение потока товаров на рынок. Это явление не имеет запаздывания, а обладает только инерционностью. Кривая потока товаров из производства начинается нулевым наклоном. Увеличение выпуска вызывается состоянием складских запасов, которые изменяются только после преодоления инерции рынка. Производство по отношению к изменениям спроса в известной степени обладает инерционностью второго порядка (собственная инерционность плюс инерционность рынка).

ПРИНЦИП РАБОТЫ ИНТЕГРАТОРА IPM-Ott

Использованное нами для решения интегрирующее устройство находится в Институте прикладной математики (IPM) Высшей технической школы г. Дармштадта. На фиг. 19 приведен его общий вид. Справа расположены четыре интегратора, в центре — наборное поле для выполнения соединений, рядом справа — два множительных устройства, рядом слева в шкафчиках на стене — восемь суммирующих устройств, еще левее — шесть регистрирующих приборов для автоматического воспроизведения произвольной кривой, подлежащей записи, или для регистрации результатов. Вычислительные операции выполняются исключительно механическим способом. Переменные изображаются в виде отрезков. Для удобства передачи данных от прибора к прибору отрезки преобразовываются в углы поворота и передаются с помощью электрических передающих систем. При этом соединение приборов обеспечивается с помощью комму-

тирующих шнуров на наборном поле. На это поле выведены входы и выходы всех устройств, так что все соединения быстро и удобно выполнимы.

Независимая переменная передается также в виде вращения некоторого вала. Она может быть любой



Фиг. 19. Общий вид интегратора IPM.

функцией, что особенно удобно при решении нелинейных задач. В этом отношении механические устройства даже превосходят электронные, равно как и в точности, которая на порядок выше (примерно 0,1%).

Время, необходимое для получения решения, естественно, значительно больше, чем у электронных устройств. Оно колеблется от 10 мин. до 1 часа в зависимости от вида решения. Затраты также более высокие, поскольку механические блоки всегда дороже и сложнее в изготовлении.

ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Современные вычислительные устройства очень удобны для решения экономических задач. Для статических задач, в которых приходится иметь дело с большим количеством чисел, особенно пригодны цифровые вычислительные машины. Моделирующие устройства удобны для динамических задач, в которых выступают непрерывно изменяющиеся функции [16].

Само собой разумеется, что эти устройства можно использовать только тогда, когда уже дана математическая формулировка задачи. Они не избавляют от необходимости составления уравнений и создания абстрактной модели. Конечно, при работе с моделирующими вы-

числительными устройствами ввиду их наглядности часто получаются новые результаты, которые могут оказаться важными для более широкой или лучшей формулировки зависимостей. Эти устройства хотя и не могут действовать творчески, но быстро и точно доводят решение задачи до численного или функционального вида.

Наличие нелинейностей, которые встречаются в экономике очень часто и которыми нельзя пренебречь, не дает возможности воспользоваться обычными математическими методами. В этом случае особенно ценными вспомогательными средствами являются методы, использующие моделирующие устройства, и прежде всего — современные интегрирующие установки.

Хотя моделирующие вычислительные устройства в США давно уже вошли в обиход, в ФРГ они еще малоизвестны. Имеется лишь небольшое количество приборов, которые можно использовать. В будущем у нас также вряд ли каждая большая фирма и каждый исследовательский институт смогут иметь свои собственные вычислительные устройства, как это имеет место в США. Скорее в ФРГ, как и в других европейских странах, будут существовать оснащенные приборами и обеспеченные квалифицированным персоналом вычислительные центры, которые смогут выполнять заказы на вычисления. Можно надеяться, что таким путем и в ФРГ современные вспомогательные средства математики смогут быть поставлены на службу науки и техники.

За содействие и помощь при проведении работ, положенных в основу этой статьи, автор приносит сердечную благодарность проф. д-ру А. Вальтеру, директору Института прикладной математики (IPM) Высшей технической школы г. Дармштадта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korn G. A., Korn Th. M., Electronic Analog Computers, New York, 1952; русский перевод см.: Корн Г. А., Корн Т. М., Электронные моделирующие устройства, издательство иностранной литературы, 1955.
2. Willers F. A., Mathematische Maschinen und Instrumente, Berlin, 1951.

3. Vorträge über Rechenanlagen, gehalten in Göttingen 19. bis 21. März 1953, Herausgeg. v. L. Biermann, Max-Planck-Inst. für Physik, Göttingen, 1953.
4. Bush V., „The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equations", *J. Franclin Inst.*, № 212, 447—488 (1931).
5. Walther A., Dreyer H.-J., „Die Integrieranlage IPM-Ott für gewöhnliche Differentialgleichungen", *Z. f. Naturwiss.*, **36**, 199—206 (1949).
6. Leontief W. W., „Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States", *Rev. Econ. Statist.*, **18**, 105—125 (1936).
7. Charnes A., Cooper W., Henderson A., An Introduction to Linear Programming, New York, 1953.
8. Dantzig G. B., „Application of the Simplex Method to a Transportation Problem"; см. Koopmans T. C., Activity Analysis of Production and Allocation, New York, 1951, Chap. XXIII.
9. Philips A., „Mechanical Models in Economic Dynamics", *Economica*, **17**, 283—305 (1950).
10. Thomson W., „Mechanical Integration of the General Linear Differential Equation of Any Order with Variable Coefficients", *Proc. Roy. Soc.* (London), **24**, 271—275 (1875—1876).
11. Knorr U., „Apparat zur selbsttätigen Aufzeichnung des Fahrdiagramms", *Elektr. Kraftbetr. u. Bahnen*, **12**, 310—314 (1914).
12. Knorr U., „Die Lösung von Differentialgleichungen auf mechanischem Wege mittels des Fahrdiagraphen, *Elektr. Kraftbetr. u. Bahnen*, **19**, 273—288 (1921).
13. Knorr U., „Uber einen Integraphen zur mechanischen Integration einer sehr allgemeinen Gruppe von Differentialgleichungen", Диссертация, Techn. Hochschule, München, 1921.
14. Morehouse N. F., Strotz R. H., Horwitz S. J., „An Electro-analog Method for Investigating Problems in Economic Dynamics: Inventory Oscillations", *Econometrica*, **18**, 313—328 (1950).
15. Soroka W. W., Analog in Computation and Simulation, New York, 1954; особенно стр. 191—210.
16. Tustin A., The Mechanism of Economic Systems, London, 1953.

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА[1])

Г. А. СИМОН

(США)

Проблему регулирования динамики производства отдельного изделия можно сформулировать с помощью теории следящих систем. Хорошо разработанные методы этой теории используются для изучения поведения системы регулирования. Это демонстрируется на простом примере, и для оценки правил альтернативных решений или создания оптимального правила формулируется стоимостный критерий. Поясняются методы преобразования Лапласа и на примерах показываются некоторые простейшие возможности их применения для исследования устойчивости системы и поведения ее в установившемся режиме[2]).

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья имеет исследовательский характер. В последнее десятилетие для анализа электрических и механических систем регулирования и следящих систем была разработана мощная и весьма общая методика. Существует очевидная аналогия между подобными системами

---

[1]) Simon H. A., *Econometrica*, **20**, № 2, 247—268 (1952).

[2]) Автор выражает признательность У. У. Куперу, К. Клару и Д. Розенблату, а также членам Комиссии Коулса по исследованиям в области экономики за многочисленные полезные советы. Это исследование проведено автором в качестве консультанта указанной комиссии в работах, выполняемых ею по контракту с корпорацией «Рэнд». Настоящая работа появится в отчетах Комиссии Коулса, № 59 (новая серия).

и системами управления производством, которые используются промышленными объединениями для составления производственной программы и графика выпуска продукции. Степень глубины этих аналогий можно проверить при исследовании достаточно простого, но все же относительно конкретного примера системы управления производством, использовав для этого обычные методы анализа следящих систем. В этом очерке не делается попыток оценить весь арсенал аналитических методов, имеющихся в распоряжении инженера для синтеза систем регулирования. Автор видит свою задачу лишь в том, чтобы дать элементарное введение в теорию следящих систем и установить ее применимость к системам регулирования производства.

Следует указать, что понятие следящей системы, замыкающейся через человека, отнюдь не ново. В частности, многие следящие системы артиллерийской наводки содержат такую связь. Сравнительно новой является идея общественной связи, отличающейся от чисто физиологической. Однако Р. М. Гудвин [12] независимо пришел к этой же идее, которую он считает ключом к изучению поведения рынка и экономических циклов. Применимость моделей следящих систем к «теории фирмы» обсуждалась Купером [8]. Следящими системами можно считать и те две динамические макросистемы, которые были воспроизведены аналоговыми моделями (одна из них была проверена экспериментально) [9, 10]. Все подобные системы укладываются в общую схему кибернетики Винера [11].

Сделаем прежде всего несколько предварительных замечаний, касающихся общей характеристики теории следящих систем и описания системы регулирования производства, которую мы будем изучать.

Теория следящих систем

Многие системы, с которыми приходится иметь дело в электротехнике и машиностроении, описываются, по крайней мере приближенно, системой линейных диффе-

ренциальных или интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. К ним относятся электрические цепи (или их механические аналоги) с сосредоточенными параметрами, в число которых входят многие системы, называемые «управляющими устройствами», «регуляторами» и «следящими системами». Мы не будем пытаться установить точные различия между этими терминами, а приведем лишь пример подобной системы.

Рассмотрим систему, состоящую из дома или другого замкнутого пространства, газовой печи и термостата, который регулирует скорость поступления газа в печь [1]). Температуру, заданную термостату (т. е. желательную температуру внутри дома), будем считать *входным сигналом* системы и обозначать ее символом θ_i; действительную температуру внутри дома назовем *выходным сигналом* θ_o; их разность $\theta_i - \theta_o$ — *ошибкой* ε, а внешнюю температуру — *нагрузкой* θ_L [2]). Все переменные являются функциями времени.

Система сконструирована таким образом, что скорость поступления газа в печь, а следовательно, и скорость поступления тепла в дом, являются функцией ошибки (в простейшем случае они пропорциональны ошибке). Далее, эта функция, связывающая ошибку с выходным сигналом, выбирается таким образом, чтобы ошибка уменьшалась независимо от приложенной к системе нагрузки.

---

[1]) Для сохранения возможно большего сходства с системой управления производством, которая будет описана ниже, будем считать, что имеется термостат с непрерывным режимом работы, а не более известный термостат релейного типа. Рассматриваемая система описана в работе [4], стр. 298—303.

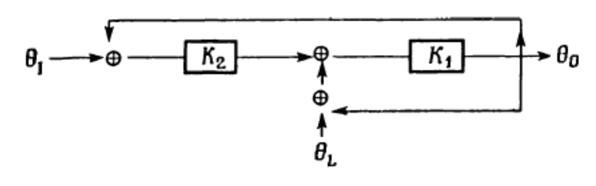
[2]) В нашем примере входной сигнал в общем случае является фиксированным, а нагрузка — переменной. Это типичный пример регулятора; часто входной сигнал называют *эталоном*. Обычно термин «следящая система» относят к системам, имеющим переменный входной сигнал, но у которых отсутствует переменная нагрузка. Однако во многих важных технических системах встречаются как переменный входной сигнал, так и переменная нагрузка.

Подобная система приведена на фиг. 1. Эта система описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\theta_o}{dt} = f(\varepsilon) - k(\theta_o - \theta_L), \tag{1}$$

$$\varepsilon = \theta_i - \theta_o. \tag{2}$$

Значком $\oplus$ на схеме обозначено дифференцирующее устройство (вычитание); прямоугольник K_2 соответствует $f(\varepsilon)$; прямоугольник K_1 — интегрированию уравнения (1), которое представляет θ_o в виде функции от $f(\varepsilon)$ и $(\theta_o - \theta_L)$.



Фиг. 1.

Следует отметить две важные особенности этой системы. Первой особенностью является наличие *цепи регулирования* или цепи *обратной связи* (верхний контур на фиг. 1), посредством которой: а) выход сравнивается со входом и б) их разность подается обратно в систему, чтобы изменить выходную величину в сторону уменьшения этой разности.

Вторая важная особенность характеризуется на схеме стрелками. Направление этих стрелок указывает, что и входной сигнал и нагрузка влияют на поведение системы (и в особенности на выходной сигнал и ошибку), но сами они не подвергаются воздействию со стороны системы. Поэтому переменные, не входящие в контуры, можно считать независимыми, и мы будем полагать, что они произвольно изменяются во времени. Этот тип связи иногда называют *однонаправленным соединением* или *каскадированием*. Обратную зависимость представляют замкнутым контуром (таким, как нижний контур на фиг. 1).

В реальных следящих системах каскадирование становится возможным благодаря тому, что замкнутая часть системы потребляет очень небольшую энергию по сравнению с энергией независимых переменных (как в солнечной системе, где имеется большое Солнце в центре, вокруг которого вращаются маленькие планеты) или в более общем случае берет необходимую ей энергию от независимого источника энергии (как в усилителе). Именно эта характерная особенность системы позволяет выходу следить за входом, не вызывая в последнем нарушений.

Таким образом, характерные признаки следящей системы таковы: 1) наличие однонаправленной связи с источником входного сигнала и нагрузкой; 2) наличие одной или нескольких цепей обратной связи, при помощи которых выходной сигнал сравнивается со входным, и 3) наличие источника энергии, управляемого сигналом рассогласования (ошибки) таким образом, чтобы выходной сигнал повторял входной. Если нагрузка имеет двунаправленную связь с выходом, то ее нельзя рассматривать как независимую переменную и она должна быть включена в систему.

Наиболее мощным орудием исследования следящих систем является преобразование Лапласа (см. [2], гл. 2 и 3). Преобразование по Лапласу входного сигнала [1]) можно рассматривать как его разложение на гармонические составляющие (т. е. оно тесно связано с интегралом Фурье). Отношение изображений выходного и входного сигналов всей следящей системы («передаточная функция» системы), описывает процесс отфильтровывания (изменения амплитуды и фазы) различных гармонических составляющих, содержащихся во входном сигнале. Преобразование по Лапласу выходного сигнала дает изображение, являющееся произведением двух первых изображений, и представляет выходной сигнал в виде гармонических составляющих. (Здесь мы не рассматриваем нагрузку, которая представляет собой дополнительное входное воздействие.)

---

[1]) Исходная функция обычно называется «оригиналом», а результат ее преобразования — «изображением». — *Прим. ред.*

Система изучается путем определения ее изображения, умножения этого изображения на изображения различных входных сигналов и исследования результирующего поведения выходного сигнала. Нас интересует устойчивость выходного сигнала (которая связана с передаточной функцией системы) и его поведение в установившемся режиме для различных входных сигналов. Введение некоторой функции оценки (функции выходного сигнала) дает нам возможность сравнивать различные следящие системы по их способности управлять выходным сигналом при определенных условиях.

Регулирование выпуска продукции

В данной статье мы рассмотрим регулирование скорости производства отдельного продукта. Подразумевается, что этот продукт изготавливается по технологическим стандартам, поступает на склад и отгружается по заказам потребителей. Продукт изготовляется непрерывно, и регулирование выражается в приказах, в соответствии с которыми непрерывно изменяется дневной объем производства (или выпуск за другой период времени, принятый за единицу).

Целью системы регулирования является минимизация затрат на производство в единицу времени. Предполагается, что эти затраты, или их переменная часть, зависят от следующих факторов: 1) от изменений в скорости изготовления (выпуск 1000 предметов при колеблющейся во времени скорости производства обходится дороже, чем при неизменной скорости выпуска) и 2) от наличных запасов готовой продукции (увеличение наличных запасов повышает издержки хранения, уменьшение запасов ниже определенного уровня вызывает задержку в выполнении заказов потребителей). Поэтому мы будем характеризовать систему с помощью критерия, который является некоторой функцией величины колебаний скорости выпуска в единицу времени и запасов готовой продукции.

В качестве входного сигнала возьмем оптимальную величину запасов θ_i. Поскольку мы будем считать ее все время неизменной, можно положить, что она равна нулю. Действительные запасы готовой продукции будем рассматривать как выходной сигнал θ_o [1]. Тогда ошибка ε будет представлять собой дефицит (положительный или отрицательный) запасов $\theta_i - \theta_o$. Количество заказов потребителей в единицу времени будем считать нагрузкой θ_L. Необходимы еще две дополнительные переменные — действительная скорость выпуска продукции в единицу времени μ и планируемая скорость выпуска или, точнее, планируемый дополнительный выпуск продукции в единицу времени η.

Предположим теперь, что на основе информации о заказах и избытке или недостатке запасов ежедневно (в нашей модели непрерывно) издаются приказы о нормах выпуска продукции. Спустя некоторое время продукты, запущенные в производство в начальный момент времени, будут действительно изготовлены и войдут в состав запасов, причем продолжительность запаздывания определяется временем производства. Между тем из запасов ежедневно (непрерывно) изымаются товары для выполнения заказов потребителей. Информация о величине запасов подается обратно для ежедневного (непрерывного) сравнения с оптимальным уровнем запасов и вычисленная ошибка в свою очередь используется для уточнения планируемой скорости выпуска.

Эта система, очевидно, обладает характерными особенностями следящей системы. В ней имеется однонаправленная связь с нагрузкой и источником входного сигнала (заказы потребителей и оптимальные запасы). Она имеет цепь обратной связи: ошибка → планируемая

---

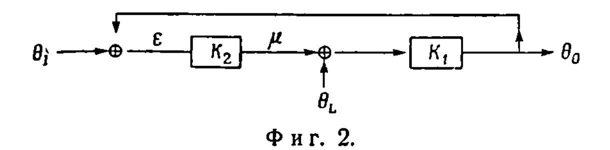
[1]) Действительные запасы готовой продукции могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательные запасы — это просто невыполненные заказы потребителей. Везде в данной статье термин «запасы» нужно понимать как «наличное количество готовой продукции или невыполненные заказы». В зависимости от производимого товара оптимальные запасы также могут быть как положительными, так и отрицательными. Первый случай относится к заводу, получающему поставки со склада, второй — к заводу, выполняющему заказы.

продукция → действительная продукция → запасы → ошибка. Ошибка вызывает изменения в планируемой продукции, направленные к уменьшению ошибки.

В последующих разделах мы опишем системы, осуществляющие только что перечисленные функции. Начнем с сильно упрощенной системы и будем ее постепенно усложнять.

2. ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА ПО РЕГУЛИРОВАНИЮ ЗАПАСОВ

Рассмотрим две системы. В первой мы будем иметь дело только с регулированием запасов. Наши решения о выпуске продукции будут основываться только на информации о запасах (и не будет приниматься во внимание информация о заказах); кроме того, положим, что запаздывание выпуска продукции равно нулю. Во второй системе все эти ограничения будут устранены.



Фиг. 2.

Описание системы

Первая система показана на фиг. 2 и в общих чертах совпадает с системой фиг. 1, отличаясь от нее лишь отсутствием нижней цепи. Предполагается, что в этой системе μ тождественно равно η. Это значит, что скорость выпуска в момент времени t равна планируемому дополнительному выпуску в момент t. Это предполагает, что план выпуска осуществляется без значительного временно́го запаздывания. Система описывается следующими уравнениями:

$$\theta_o(t) = K_1[\mu(t) - \theta_L(t)], \quad (3)$$

$$\mu(t) = K_2[\varepsilon(t)], \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = \theta_i(t) - \theta_o(t). \quad (5)$$

Здесь K_1 и K_2 являются линейными операторами, вид которых будет определен ниже.

Уравнение (5) представляет собой определение. Уравнение (4) дает правило принятия решения — оно определяет объем планируемого (и фактически достигнутого) выпуска продукции в единицу времени как функцию избытка или недостатка запасов. Точный вид уравнения (3) определяется условиями задачи, поскольку по определению

$$\frac{d\theta_o}{dt} = \mu - \theta_L. \tag{6}$$

Поэтому для конструирования следящей системы описанного класса, которая удовлетворяет некоторому критерию оптимальности, мы имеем в своем распоряжении только оператор K_2 — правило принятия решения.

Уравнения (3)—(6) можно представить в виде изображений; при этом действительная переменная t заменяется комплексной переменной p. Преобразование по Лапласу функции $y(t)$, записываемое как $L[y(t)] = y^*(p)$, определяется выражением

$$y^*(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt. \tag{7}$$

Этот интеграл существует для широкого класса функций, хотя в некоторых случаях его нужно определять как интеграл Лебега, а не как интеграл Римана. Обратное преобразование имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} y^*(p) e^{pt} dp, \tag{8}$$

где интегрирование производится параллельно мнимой оси вдоль прямой $\operatorname{Re} p = b$ (действительная часть p равна b) [1]).

[1]) В этой статье не делается попыток соблюдать математическую строгость изложения. Весь используемый здесь математический аппарат можно найти, например, в работах [2], гл. 11, и [3]. Последняя работа содержит также (стр. 332—357) весьма полезную таблицу соответствий оригиналов и изображений по Лапласу.

Можно показать, что изображение производной от функции, которая в начальный момент равна нулю, равно произведению p на изображение самой функции. Используя это соотношение, мы можем преобразовать по Лапласу члены уравнения (6) и получить уравнение (9) (см. ниже). Сравнение уравнений (9) и (3) показывает, что оператор K_1 в t-области (интегрирование) соответствует умножению на $1/p$ в p-области. В уравнениях (10) и (11) ниже записаны соотношения в p-области, которые получены соответственно преобразованием уравнений (4) и (5). Итак, имеем

$$\theta_o(p) = \frac{1}{p}[\mu(p) - \theta_L(p)], \tag{9}$$

$$\mu(p) = K_2(p) \cdot \varepsilon(p), \tag{10}$$

$$\varepsilon(p) = \theta_i(p) - \theta_o(p), \tag{11}$$

где $\theta_o(p)$ и т. д. представляют соответственно изображения функций $\theta_o(t)$ и т. д. (Поскольку аргумент каждой функции указывает, определена ли она в p-области или t-области, в этих и последующих уравнениях мы при записи изображений опускаем значок *). Если мы теперь примем $\theta_i \equiv 0$ и введем *передаточную функцию системы*

$$Y(p) = \frac{\theta_o(p)}{\theta_L(p)}, \tag{12}$$

то из уравнений (9)—(11) получим

$$Y(p) = \frac{-\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}K_2} = \frac{-1}{p + K_2(p)}. \tag{13}$$

Теоремы преобразования Лапласа

Поведение системы при переменной нагрузке можно исследовать путем изучения свойств передаточной функции системы $Y(p)$. Для понимания нижеследующего обсуждения мы изложим без доказательства и строгой ма-

тематической формулировки некоторые положения теории преобразований Лапласа[1]).

Система будет называться *устойчивой*, если выходной сигнал остается ограниченным (в t-области) для всех ограниченных входных сигналов (в t-области). Уравнение, полученное приравниванием знаменателя $Y(p)$ нулю, назовем *характеристическим уравнением* для $Y(p)$. Для нашей конкретной системы имеем

$$p + K_2(p) = 0. \tag{14}$$

При условии, что числитель $Y(p)$ не имеет конечных полюсов, система будет устойчивой тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части.

Пусть $W(t)$ будет обратным преобразованием $Y(p)$ в соответствии с выражением (8). Назовем $W(t)$ *весовой функцией*, или *импульсной характеристикой* системы. Умножение в p-области соответствует свертке в t-области. Поэтому из (12) имеем

$$\theta_o(t) = \int_0^\infty W(\tau)\,\theta_L(t-\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Уравнение (15) связывает изменение во времени входного сигнала с весовой функцией системы и изменением нагрузки во времени. Однако мы не будем пользоваться этим соотношением. Вместо этого будем умножать изображение $\theta_L(t$ на передаточную функцию системы и затем, произведя обратное преобразование этого произведения, получим непосредственно $\theta(t)$. Именно эта процедура совместно с имеющимися таблицами соответствий оригинал — изображение делает метод преобразования Лапласа чрезвычайно эффективным.

---

[1]) Для ознакомления с математическим аппаратом преобразования Лапласа можно обратиться, например, к книгам: Б. С. Римский-Корсаков, Операционное исчисление, Изд-во «Высшая школа», М., 1960 или Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, 1960. — *Прим. ред.*

Но прежде приведем еще две полезные теоремы, которые справедливы, если указанные пределы существуют:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{p \to 0} py(p), \tag{16}$$

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{p \to \infty} py(p). \tag{17}$$

В частности, уравнение (16) позволяет нам сразу без перехода в t-область определить установившееся состояние на выходе, если известны нагрузка и передаточная функция системы.

Установившееся и переходное состояния

Вернемся теперь к задаче определения для нашей конкретной системы передаточной функции $K_2(p)$, которая обеспечит соответствующее изменение $\theta_o(t)$. Под «соответствующим» изменением мы подразумеваем, что $\theta_o(t)$ должна быть как можно меньше. Рассмотрим сначала установившееся состояние, которое будем изучать с помощью уравнения (16):

$$\lim_{t \to \infty} \theta_o(t) = \lim_{p \to 0} p\theta_o(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p\theta_L(p)}{p + K_2(p)}. \tag{18}$$

А. Предположим, что вплоть до времени $t = 0$ число заказов равно нулю и что после этого они стали поступать со скоростью 1 заказ в единицу времени, т. е.

$$\theta_L(t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0; \quad \theta_L(t) = 1 \quad \text{для} \quad t \geqslant 0. \tag{19}$$

Имеем

$$L[\theta_L(t)] = \theta_L(p) = \frac{1}{p}. \tag{20}$$

Отсюда

$$\lim_{t \to \infty} \theta_o(t) = \lim_{p \to 0} - \frac{1}{p + K_2(p)}. \tag{21}$$

Итак, мы хотим, чтобы знаменатель правой части уравнения (21) становился очень большим при прибли-

жении p к нулю. Это условие может быть выполнено, если, например, положить

$$K_2 = \frac{1}{p^k}(a + bp) \quad \text{при} \quad k \geqslant 1, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (22)$$

При больших a обеспечивается быстрая сходимость.

Б. Предположим, что вплоть до момента $t = 0$ число заказов было равно нулю, а затем они стали поступать со скоростью t^n заказов в единицу времени:

$$\theta_L(t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0; \quad \theta_L(t) = t^n \quad \text{для} \quad t \geqslant 0. \quad (23)$$

Тогда имеем

$$L[\theta_L(t)] = \theta_L(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (24)$$

В этом случае нулевая ошибка в установившемся состоянии обеспечивается с помощью K_2 того же вида, что и в (22), но при $k \geqslant (n + 1)$.

В. Положим, что $\theta_L(t)$ изменяется по синусоидальному закону:

$$\theta_L(t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0, \quad (23)$$

$$\theta_L(t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = A\cos\omega t \quad \text{для} \quad t \geqslant 0. \quad (24)$$

Здесь нельзя воспользоваться методом, примененным в двух первых случаях, поскольку можно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty} \theta_o(t)$ не существует. Поэтому воспользуемся тем обстоятельством, что если $\theta_L(t)$ изменяется синусоидально, то $\theta_o(t)$ будет также синусоидальной функцией (если не учитывать переходный процесс), имеющей ту же частоту, но измененные амплитуду и фазу, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \theta_o(t) = B\cos(\omega t + \psi). \quad (25)$$

Амплитуда B выходного сигнала определяется выражением

$$B = A[Y(j\omega)\,Y(-j\omega)]^{1/2}. \quad (26)$$

Если, например, $K_2 = (a/p) + B$, имеем

$$Y(p) = \frac{-1}{p + K_2(p)} = \frac{-p}{p^2 + bp + a} = \frac{-p}{(p - p_1)(p - p_2)}, \tag{27}$$

где p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения. Следовательно,

$$Y(j\omega)\,Y(-j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \cdot \frac{j\omega}{(-j\omega - p_1)(-j\omega - p_2)} =$$

$$= \frac{\omega^2}{\left(\omega^2 + p_1^2\right)\left(\omega^2 + p_2^2\right)}, \tag{28}$$

$$B = A\omega\left[\left(\omega^2 + p_1^2\right)\left(\omega^2 + p_2^2\right)\right]^{-1/2}. \tag{29}$$

Для данных p_1, p_2 величина B стремится к нулю, когда ω стремится к нулю; при увеличении ω величина B стремится к A/ω. Если $p_1 = p_2$, то B стремится к своему максимуму при $\omega = p_1$. Этот максимум равен $B = A/2p_1$. Отсюда видно, что если выбрать K_2 таким образом, чтобы характеристическое уравнение имело большие корни, то обеспечивается быстрое затухание θ_o для синусоидальной нагрузки [1]).

Таким образом, мы указали свойства, которыми должно обладать правило принятия решения (оператор K_2) для того, чтобы обеспечить в устойчивом состоянии малый или исчезающий избыток (или нехватку) запасов при различных нагрузках.

Оценим теперь полученные результаты в области t. Положим, что $Y(p)$ есть алгебраическое выражение вида

$$Y(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}. \tag{30}$$

---

[1]) По аналогии с тем фактом, что широкий класс функций может быть представлен рядом Фурье по синусам, анализ установившегося состояния при произвольной нагрузке в теории следящих систем может быть выполнен разложением функции, описывающей нагрузку, в весовой интеграл синусоидальных составляющих с непрерывно изменяющейся частотой. Поэтому мы в последующих разделах при анализе устойчивого состояния ограничимся рассмотрением простой синусоидальной нагрузки, что не приведет к существенной потере общности в отношении вида функции, описывающей заказы потребителей (см., однако, примечание на стр. 241).

Тогда уравнение в t-области, полученное с помощью преобразования (12), примет вид

$$a_n \frac{d^n\theta_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}\theta_o}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0\theta_o =$$

$$= b_m \frac{d^m\theta_L}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}\theta_L}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0\theta_L. \qquad (31)$$

Если, например, $Y(p)$ определяется уравнением (27), имеем

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + b \frac{d\theta_o}{dt} + a\theta_o = - \frac{d\theta_L}{dt}. \qquad (32)$$

С помощью этого уравнения можно проверить сделанные выше выводы. Например, в случае А мы имели $\frac{d\theta_L}{dt} = 0$ для $t \geqslant 0$. В этом случае общее решение уравнения (32) имеет вид

$$\theta_o = Me^{p_1 t} + Ne^{p_2 t}, \qquad (33)$$

где p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}. \qquad (34)$$

Поскольку $a > 0$, $b > 0$, то p_1 и p_2 будут действительными отрицательными числами или комплексными числами с отрицательными действительными частями, и поэтому при возрастании t выражение (33) будет стремиться к нулю.

Если же, наоборот, имеем $\frac{d\theta_L}{dt} = 1$ для $t \geqslant 0$, общее решение уравнения (32) будет иметь вид

$$\theta_o = Me^{p_1 t} + Ne^{p_2 t} + \frac{1}{a}. \qquad (35)$$

В этом случае передаточная функция системы (27) будет в установившемся состоянии при $t \to \infty$ давать

ошибку $1/a$. Этот результат опять может быть получен непосредственной подстановкой (27) и $\theta_L(p) = 1/p^2$ в (18). Кроме того, переходная составляющая θ_o быстро затухает, если отрицательные действительные части p_1 и p_2 велики.

Возвращаясь к случаю синусоидальной нагрузки

$$\theta_L(p) = L[\cos \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{36}$$

при передаточной функции системы вида (27), имеем

$$\theta_o(p) = \frac{-p\omega}{(p-p_1)(p-p_2)(p^2+\omega^2)} =$$
$$= \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \frac{C_p + D}{p^2+\omega^2}. \tag{37}$$

Преобразование этого выражения дает

$$\theta_o(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} + E\cos(\omega t + \psi). \tag{38}$$

Последний член уравнения (38) мы уже встречали в выражении (25) — это реакция системы в установившемся режиме на синусоидальную нагрузку. Первые два члена представляют переходный процесс, который и в этом случае быстро затухает, если p_1 и p_2 имеют большие отрицательные действительные части.

Устойчивость системы

Выше мы установили, что система будет устойчива, если корни характеристического уравнения передаточной функции системы имеют отрицательные действительные части. В предыдущем разделе мы отметили, что переходная характеристика системы не зависит от нагрузки и определяется корнями характеристического уравнения. Если корни имеют большие отрицательные действительные части, переходный процесс сильно задемпфирован. Этот результат позволяет высказать предположение, что многие свойства системы могут быть непосредственно определены исследованием корней ха-

рактеристического уравнения. Проведем это исследование для различных K_2[1]).

А. Пусть $K_2 = a/p$, где a — действительно. Тогда $p_0 = \pm\sqrt{a}$ и система неустойчива, поскольку по крайней мере один из корней имеет положительную действительную часть.

Б. Пусть $K_2 = (a/p) + b$, где a и b — действительны. Тогда $p_0 = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4a})/2$ и система устойчива, если $a > 0$, $b > 0$; в противном случае она неустойчива. Этот результат вытекает из уравнений (33) и (34).

В. Пусть $K_2 = (a/p) + b + cp$, где a, b, c — действительны. Тогда $p_0 = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c+1)}]/2(c+1)$ и система устойчива, если a, b и $(c+1)$ имеют одинаковые знаки; в противном случае она неустойчива.

Интерпретация оператора решений

Оператор K_2 представляет правило принятия решения. Поскольку $\mu(p) = K_2(p) \cdot \varepsilon(p)$, это правило на основе сведений о текущем избытке или недостатке запасов $\varepsilon(p)$ определяет, с какой скоростью $\mu(p)$ следует продолжать производство. К операторам, у которых обнаружены нужные свойства, относится оператор $K_2 = (a/p) + b$, где a и b — большие положительные постоянные. Вводя этот оператор в уравнение (4), получаем

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = a\varepsilon(t) + b\,\frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \qquad (39)$$

---

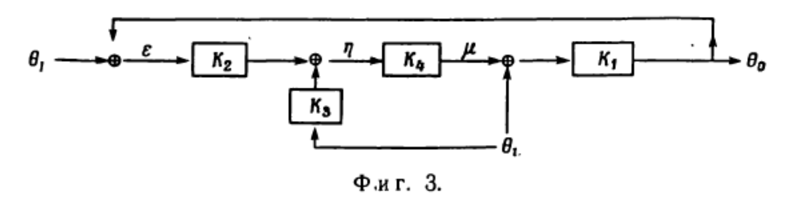
[1]) Мы не будем использовать в данной статье некоторые методы, вроде правила Найквиста, широко применяемые при анализе следящих систем для исследования наличия в системе какого-либо корня с положительной действительной частью. О правиле Найквиста см., например, [2], стр. 67—75, и [5], гл. V. Здесь уместно подчеркнуть исследовательский характер этой статьи. Главное внимание уделяется формулировке задачи на языке теории следящих систем, определению критериев оценки качества системы регулирования и обзору общих основ теории следящих систем, пригодных для решения таких задач. Для более компетентной оценки разнообразия аналитических и графических методов, которые находятся в распоряжении инженера по регулированию для синтеза регулирующих элементов с требуемыми характеристиками, читатель отсылается к списку литературы в конце статьи.

Это означает, что скорость выпуска нужно увеличить или уменьшить на величину, пропорциональную дефициту или избытку запасов, плюс величина, пропорциональная скорости уменьшения запасов. Коэффициенты пропорциональности a и b должны быть большими, если желательно поддерживать колебания запасов в узких пределах. Если необходимо вовсе избежать колебаний, должно выдерживаться соотношение $b^2 > 4a$.

Все это очевидно и с точки зрения здравого смысла. Но, возможно, не вполне очевидно, что для устойчивости системы необходимо регулирование *по производной* [последний член в уравнении (39)]. Основывать изменения скорости выпуска только на величине запасов (положив $b = 0$), означало бы ввести незатухающие колебания в систему (ср. пункты А и Б предыдущего раздела).

3. СИСТЕМА С ВРЕМЕННЫ́М ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ЗАТРАТЫ — ВЫПУСК

После этого предварительного анализа простой системы мы подготовлены к изучению системы, более точно апроксимирующей задачи, с которыми можно встретиться в реальной действительности. Наиболее важными



Фиг. 3.

ее особенностями, отсутствующими в предыдущей системе, являются временны́е запаздывания затраты — выпуск и наличие информации о новых заказах. В реальной жизни существует временно́е запаздывание действительного увеличения выпуска продукции по отношению к моменту принятия соответствующего решения.

Описание системы

На фиг. 3 показана система с временны́м запаздыванием затраты — выпуск. Она описывается следующими уравнениями:

$$\theta_o = K_1 (\mu - \theta_L), \tag{40}$$

$$\mu = K_4 \eta, \tag{41}$$

$$\eta = K_2 \varepsilon + K_3 \theta_L, \tag{42}$$

$$\varepsilon = \theta_i - \theta_o. \tag{43}$$

Новая переменная $\eta(t)$ представляет приказы, издаваемые в момент времени t относительно скорости выпуска; $\mu(t)$ теперь представляет действительную скорость выпуска готовой продукции в момент t. $\mu(p)$ и $\eta(p)$ связаны по соотношению (41) с помощью «оператора запаздывания» K_4. Как и раньше, имеем, по определению, $K_1 = 1/p$. Операторы K_2 и K_3 соответствуют правилу принятия решения, которое теперь зависит от уровня запасов и скорости поступления новых заказов. Для определения оптимального правила составления производственной программы в нашем распоряжении находятся оба оператора. Остается только найти подходящий вид для оператора K_4.

Простейшим допущением будет считать запаздывание постоянным и равным τ, т. е.

$$\mu(t) = \eta(t - \tau). \tag{44}$$

Это означает, что если в какой-то момент времени принято решение об обеспечении той или иной нормы выпуска, то этот выпуск готовых изделий фактически начнется на τ единиц времени позже. Изображение Лапласа для оператора $K_4(p)$, соответствующего (44), имеет вид

$$K_4(p) = e^{-\tau p}. \tag{45}$$

Подставляя известные функции $K_1 p$ и $K_4 p$ в нашу систему уравнений и разрешая ее относительно передаточной функции системы, получаем

$$Y(p) = \frac{\theta_o(p)}{\theta_L(p)} = \frac{e^{-\tau p} K_3 - 1}{p + e^{-\tau p} K_2}. \tag{46}$$

Сравнение уравнений (46) и (13) показывает, что введение запаздывания отражается как на числителе, так и на знаменателе. Поэтому мы должны все исследовать заново.

Прямой поток информации о новых заказах

Рассмотрение числителя выражения (46) показывает, что регулирование запасов не является тривиальной задачей. Если мы положим $K_3 = 1$, то числитель обращается в $e^{-\tau p} - 1$ и стремится к нулю, только если p стремится к $2n\pi j/\tau$, где n — нуль или целое число. Отсюда видно, что с помощью этого метода стабилизация запасов будет совершенной только тогда, когда собственные частоты синусоидальной нагрузки будут являться гармониками частоты, соответствующей запаздыванию выпуска. В лучшем случае мы можем сказать, что система будет работать успешнее, если оператор $K_3 = 1$, чем вообще без какой-либо информации относительно заказов, но ее работа ни в коем случае не будет совершенной.

Попробуем положить $K_3 = e^{\tau p}$. Тогда $e^{-\tau p}K_3 - 1 \equiv 0$. Определим переменную φ таким образом, чтобы

$$\varphi(p) = e^{\tau p}\theta_L(p). \tag{47}$$

Произведя обратные преобразования обеих частей, получим

$$\varphi(t) = \theta_L(t+\tau). \tag{48}$$

Отсюда видно, что принятие $K_3 = e^{\tau p}$ соответствует предсказанию значения θ_L на τ единиц времени раньше действительного получения заказов. И снова результат интуитивно является очевидным. Если можно предсказать количество заказов на период времени τ, то мы можем запланировать выпуск в ожидании действительного получения этих заказов и избежать каких бы то ни было колебаний запасов.

Мы не можем далее исследовать проблему предсказания $\theta_L(t+\tau)$, однако рассмотрим оптимальные правила принятия решения для случая, когда будущие заказы точно не известны [1].

Обратная связь по информации о запасах

Рассмотрим знаменатель выражения (46). Ввиду синусоидального характера множителя $e^{-\tau p}$ знаменатель грубо может быть представлен выражением $p+K_2$. Поэтому эта система в общем будет подобна системе, исследованной в разд. 2. Более того, в силу уравнения (16) мы можем ожидать такого же общего поведения этой системы в установившемся состоянии, как и рассмотренной выше системы.

Корни характеристического уравнения

$$p^2+(a+bp)e^{-\tau p}=0. \qquad (49)$$

оценить нелегко. От детального исследования корней этого трансцендентного уравнения мы здесь вынуждены отказаться. Вместо этого мы предложим метод замены фиксированного запаздывания, определяемого оператором $e^{-\tau p}$, распределенным запаздыванием, определяемым оператором $a^2/(a^2+p^2)$, который сохраняет алгебраический характер передаточной функции системы и позволяет избежать трудностей, связанных с использованием уравнения (49) [2].

---

[1]) В работе, которая в настоящее время ведется над этой проблемой в Технологическом институте Карнеги для военно-воздушных сил, предпринята попытка сформулировать заново эту задачу в стохастических терминах. При этом методе функция заказов потребителей рассматривается как автокорреляционная функция, а не как сумма наложенных друг на друга синусоидальных функций. Если рассматривать задачу с этой точки зрения, довольно искусственное разграничение, которое мы проводили между задачей предсказания и задачей фильтрации, отпадает. Стохастический подход в применении к теории следящих систем в значительной степени является заслугой Н. Винера (см. работы [6] и [2], гл. VI—VIII). Работа автора еще не настолько продвинулась, чтобы можно было указать пределы применимости стохастических методов в связи с изучаемыми здесь задачами.

[2]) Такая задача не всегда обоснована. — *Прим. ред.*

Вместо $\mu(t)=\eta(t-\tau)$ напишем

$$\mu(t)=\int_0^t P(\tau)\,\eta(t-\tau)\,d\tau, \qquad (50)$$

где

$$\int_0^\infty P(\tau)\,d\tau=1.$$

Таким образом, $P(\tau)$ можно рассматривать как вероятность того, что запаздывание выпуска определенного запланированного товара будет равно τ. Для больших величин τ можно ожидать, что $P(\tau)$ равно нулю или, по крайней мере, очень мало. Если справедливо уравнение (50), то, согласно (15), имеем

$$\mu(p)=P(p)\,\eta(p). \qquad (51)$$

Положим, например, $P(\tau)=a^2\tau e^{-a\tau}$. Тогда $P(p) = a^2/(a^2+p^2)$ и

$$\theta_o=\frac{\left(\frac{a^2}{a^2+p^2}K_3-1\right)\theta_L}{p+\frac{a^2}{a^2+p^2}K_2}\,. \qquad (52)$$

Если мы определим $\bar{\tau}=\int_0^\infty \tau P(\tau)\,d\tau=2/a$ как *среднее запаздывание*, то увидим, что это среднее запаздывание все еще не зависит от η.

Передаточная функция системы, определяемая уравнением (52), может быть исследована методами, использованными ранее для нахождения подходящего вида K_3 и K_2. Например, положив $K_3=1$, $K_2=b+cp^2$, получим

$$Y(p)=\frac{-p^2}{p^3+a^2cp^2+a^2p+a^2b}\,. \qquad (53)$$

Это выражение имеет в установившемся состоянии нулевую ошибку при $\theta_L=1/p^2$, т. е. при $\theta_L=t\ (t\geqslant 0)$. Для параметров b и c можно принять такие значения, чтобы действительные части корней характеристического урав-

нения были отрицательны, а, следовательно, система была бы устойчивой. Необходимым и достаточным условием этого является $c > b > 0$.

4. РЕГУЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЗАПАСОВ И СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЙ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ

Общий критерий оптимальности системы регулирования производства рассматриваемого типа заключается в минимизации в некотором смысле затрат на выпуск продукции.

Большие запасы порождают затраты по уплате процентов, а также, возможно, издержки физического обесценивания при хранении, складские затраты и т. д. С другой стороны, нехватка запасов (избыточные отрицательные запасы) вызывает затраты в смысле задержки в выполнении заказов, а следовательно, недоброжелательное отношение заказчиков. Поэтому представляется разумным включить в издержки производства элемент, характеризующий издержки, обусловленные избытком или недостатком запасов, скажем, в виде некоторой функции $\xi_1(\theta_o)$. В первом приближении мы можем принять ξ_1 пропорциональной $|\theta_o|$ или θ_o^2.

Кажется разумным также предположить, что издержки производства определенного количества продукции за некоторый период времени будут минимальными при постоянном выпуске продукции. Если мы представим выпуск в виде некоторой постоянной плюс переменная функция с нулевым средним значением: $\mu(t) = M + \mu(t)$, то можем считать, что скорость изменения издержек является функцией M, а также частоты и амплитуды функции $\mu(t)$.

Из уравнения (40) мы знаем, что

$$\theta_o(p) = \frac{1}{p}\mu(p) - \frac{1}{p}\theta_L(p), \tag{54}$$

т. е.

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} = \mu(t) - \theta_L(t). \tag{55}$$

Отсюда следует, что если нам удастся стабилизировать θ_0 на уровне $\theta_0 = 0$, то μ не должно быть постоянным, а должно повторять изменения $\theta^L(t)$. И наоборот, если мы стабилизируем μ, то величина θ_0 не будет постоянной, а будет повторной изменения интеграла от $\theta_L(t)$. Мы не можем создать систему, которая одновременно исключала бы колебания и запасов и выпуска, а вынуждены вместо этого установить какой-то критерий, являющийся некоторым взвешенным средним этих величин.

Исследование конкретного критерия

Для конкретности рассмотрим установившееся состояние системы при синусоидальных входе и выходе. Это предположение совместимо с системой (55). В самом деле, если в установившемся состоянии θ_L изменяется синусоидально, то θ_0 и μ также будут изменяться по синусоидальному закону с тем же периодом. Примем, что издержки, связанные с μ, пропорциональны квадрату амплитуды этих колебаний, т. е. имеют вид $\rho|B|^2$, где $|B|$ — амплитуда колебаний. Примем также, что издержки хранения запасов равны $\sigma|C|^2$, где $|C|$ — амплитуда θ_0.

Положим

$$\theta_L(t) = a\cos\omega t. \tag{56}$$

$$\mu(t) = b\cos\omega t + \beta\sin\omega t, \tag{57}$$

$$\theta_0(t) = c\cos\omega t + \gamma\sin\omega t, \tag{58}$$

где a, b, β, c и γ — действительны, откуда

$$\omega\gamma = b - a, \quad -\omega c = \beta. \tag{59}$$

Мы хотим минимизировать выражение

$$\rho(b^2+\beta^2) + \sigma(c^2+\gamma^2) = \xi \tag{60}$$

при условии (59). Подставляя c и γ из (59) в (60), образуя производные от ξ по b и β и приравнивая их нулю,

получим

$$b = \frac{a\sigma}{\rho\omega^2 + \sigma}, \quad \beta = 0, \tag{61}$$

$$c = 0, \quad \gamma = \frac{a\rho\omega}{\rho\omega^2 + \sigma}. \tag{62}$$

Для малых ω имеем $b \to a$, $\gamma \to 0$, а для больших ω $b \to 0$, $\gamma \to 0$, $\omega\gamma \to -a$.

Оценивая эти результаты, мы видим, что при оптимальном правиле принятия решения будет варьироваться скорость изменения выпуска, а запасы будут удерживаться на уровне, достаточном для покрытия спроса при колебаниях заказов с большим периодом. При краткосрочных изменениях оптимальное правило принятия решения стабилизирует производство, допуская колебания запасов. В последнем случае избыток или нехватка запасов будут оставаться малыми ($\gamma \to 0$), так как период колебаний мал. Амплитуда колебаний выпуска (b) будет изменяться обратно пропорционально ω. Величина колебаний запасов γ будет иметь максимум при $\omega^2 = \sigma/\rho$.

Альтернативный критерий

В предыдущем разделе мы использовали квадратичную функцию издержек (60). Интересные результаты получаются при использовании линейной функции

$$\zeta = \rho\left|\sqrt{b^2 + \beta^2}\right| + \sigma\left|\sqrt{c^2 + \gamma^2}\right|. \tag{63}$$

Минимизируя ζ после подстановки c и γ из (59), находим оптимальные значения

$$\beta = 0, \quad c = 0. \tag{64}$$

Но для b получаем

$$b = 0 \quad \text{для} \quad \omega > \frac{\sigma}{\rho}, \quad b = a \quad \text{для} \quad \omega < \frac{\sigma}{\rho}, \tag{65}$$

а для γ соответственно имеем

$$\gamma = -a \quad \text{для} \quad \omega > \frac{\sigma}{\rho}, \quad \gamma = 0 \quad \text{для} \quad \omega < \frac{\sigma}{\rho}. \tag{66}$$

Положив теперь $Z(p) = \mu(p)/\theta_L(p)$, мы видим, что для получения оптимального результата $Z(p)$ должна иметь характеристику идеального фильтра нижних частот: этот фильтр должен пропускать без искажений все частоты ниже $2\pi\sigma/\rho$ и отфильтровывать все частоты выше $2\pi\sigma/\rho$. Смысл этого требования с точки зрения правила принятия решения можно оценить теми же методами, которые были использованы в предыдущем разделе для квадратичной функции издержек.

Требования к передаточной функции системы

Возвращаясь к квадратичной функции издержек, мы должны теперь определить, какой вид передаточной функции системы будет удовлетворять уравнениям (57), (58) при условии, что величины b, β, c и γ задаются уравнениями (61) и (62). Для краткости обозначим $\theta_o(p)/\theta_L(p) = Y(p)$ и $\mu(p)/\theta_L(p) = Z(p)$. Тогда из (54) имеем

$$Z(p) = 1 + pY(p). \qquad (67)$$

Оптимальную передаточную функцию $Z(p)$ легко определить следующим образом. Вспомнив уравнение (15), мы можем записать выходной сигнал $\mu(t)$ для синусоидальной нагрузки $e^{j\omega t}$ в виде

$$\mu(t) = \int_0^\infty Z(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_0^\infty Z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \qquad (68)$$

Но коэффициент под знаком интеграла в правой части этого уравнения по определению равен $Z(j\omega)$. Это значит, что для синусоидальной нагрузки с периодом $2\pi\omega$ имеем

$$\mu(t) = Z(j\omega)\,\theta_L(t). \qquad (69)$$

Сразу видно, что

$$Z(j\omega) = \frac{b}{a} = \frac{\sigma}{\rho\omega^2 + \sigma}, \qquad (70)$$

откуда

$$Z(p)=\frac{\sigma}{-\rho p^2+\sigma}, \tag{71}$$

а из (62) получаем

$$Y(p)=\frac{\rho p}{-\rho p^2+\sigma}. \tag{72}$$

Однако характеристические уравнения для $Z(p)$ и $Y(p)$ имеют действительные корни противоположных знаков: $p = \pm (\sigma/\rho)^{1/2}$. Поэтому система, имеющая такие передаточные функции, будет неустойчива: переходная составляющая выходного сигнала будет увеличиваться по экспоненциальному закону.

Причина этого несколько неприятного результата состоит в том, что мы образовали передаточную функцию для минимизации издержек при работе в установившемся состоянии. Но это в общем случае не ведет к минимизации издержек в моменты перехода системы из одного установившегося состояния в другое. Очевидно, что для $\theta_L(t)=T_A=\text{const}\,(t\geqslant 0)$ желательно, чтобы выполнялись условия:

$$\mu(t)=T+\text{Переходный член}, \tag{73}$$

$$\theta_o(t)=0+\text{Переходный член}. \tag{74}$$

Слагаемое от переходного процесса должно быть таким, чтобы $\mu(t)$ не имело выброса, т. е. система должна быть передемпфирована. Это подразумевает, что корни характеристического уравнения $Z(p)$ должны быть действительными и отрицательными. Чтобы получить желаемые изменения $\mu(t)$ в установившемся состоянии для указанной нагрузки, потребуем выполнения условий

$$\lim_{p\to 0} pZ(p)(T/p)=\lim_{p\to 0} Z(p)\,T=T.$$

Из (74) следует, что $\theta_o(t)$ будет сильно демпфировано, если $\lim\limits_{p\to 0} Y(p)\,T=0$. Но из (67) видно, что последнее условие является достаточным для выполнения равенства $\lim\limits_{p\to 0} Z(p)\,T=T$.

Анализ показывает, что для передаточных функций (71) и (72) эти предельные условия выполняются; в то

же время вследствие неустойчивости условия для переходного процесса не удовлетворяются. **Для исправления** этого положения заменим знаменатель $Y(p)$ выражением $(\sqrt{\rho}\,p+\sqrt{\sigma})^2$. Результирующая передаточная функция

$$Y(p)=\frac{-\rho p}{(\sqrt{\rho}p+\sqrt{\sigma})^2} \tag{75}$$

имеет критическое затухание и при больших p стремится к передаточной функции (72). Характеристическое уравнение имеет два совпавших отрицательных действительных корня: $p_0=-(\sigma/\rho)^{1/2}$. Переходный член в выражении для $\mu(t)$ будет иметь вид Ate^{-p_0t}.

Определение правила принятия решения

Вернемся теперь к задаче отыскания операторов K_3 и K_2, реализующих $Y(p)$ вида (75). Исследуем сперва случай, когда $K_4=1$ (запаздывание отсутствует). В этом случае

$$Y(p)=\frac{K_3-1}{p+K_2}. \tag{76}$$

Если теперь положить $K_3=1-\rho p$, $K_2=\rho p^2+[2(\rho\sigma)^{1/2}-1]p+\sigma$ и подставить в (76), мы в результате получим функцию (75). Кроме того, для $Z(p)$ будем иметь

$$Z(p)=\frac{2\sqrt{\rho\sigma}\,p+\sigma}{(\sqrt{\rho}\,p+\sqrt{\sigma})^2}. \tag{77}$$

Поскольку в случае нулевого времени запаздывания $\mu(t)=\eta(t)$, уравнение (77) дает следующее правило для определения $\eta(t)$:

$$\rho\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\sqrt{\rho\sigma}\frac{d\eta}{dt}+\sigma\eta(t)=2\sqrt{\rho\sigma}\frac{d\theta_L}{dt}+\sigma\theta_L(t). \tag{78}$$

В случае когда имеется постоянное запаздывание $K_4=e^{-\tau p}$, имеем

$$Y(p)=\frac{e^{-\tau p}K_3-1}{p+e^{-\tau p}K_2},\quad Z(p)=\frac{e^{-\tau p}(K_2+pK_3)}{p+e^{-\tau p}K_2}. \tag{79}$$

Если положить $X(p)=\eta(p)/\theta_L(p)$, то из (41) и (79) получаем

$$X(p)=\frac{K_2+pK_3}{p+e^{-\tau p}K_2}. \qquad (80)$$

Придавая K_2 и K_3 те же значения, что и в предыдущем случае, имеем

$$X(p)=\frac{2\sqrt{\rho\sigma}\,p+\sigma}{p(1-e^{-\tau p})+e^{-\tau p}(\sqrt{\rho}\,p+\sqrt{\sigma})^2}. \qquad (81)$$

Соответствующее правило принятия решения будет иметь вид

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=(1-2\sqrt{\rho\sigma})\frac{d\eta(t-\tau)}{dt}-\rho\frac{d^2\eta(t-\tau)}{dt^2}-$$
$$-\sigma\eta(t-\tau)+2\sqrt{\rho\sigma}\frac{d\theta_L(t)}{dt}+\sigma\theta_L(t). \qquad (82)$$

Это правило можно считать практической апроксимацией правила, которое минимизирует издержки. Для предельных случаев $\rho\to\infty$ и $\rho=0$ оно имеет те же свойства, что и правило, полученное из (77).

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЯ ИЗДЕРЖЕК

Критерий издержек, введенный в разд. 4, несомненно чрезмерно упрощен. В этом разделе мы рассмотрим возможные методы создания более реалистического критерия. В частности, мы намерены провести более полный анализ той части функции издержек, которая зависит от скорости производства.

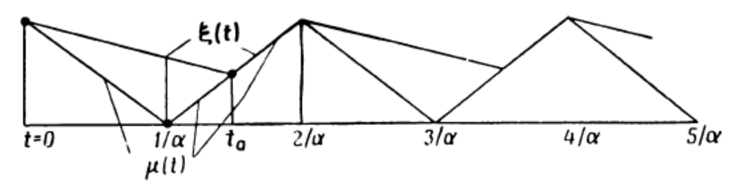
Положим, что издержки производства являются суммой трех составляющих:

1. Переменные издержки, пропорциональные скорости выпуска продукции (например, стоимость материалов). Поскольку эти издержки определяются количеством заказов, подлежащих выполнению, и поэтому не зависят от системы регулирования, мы по-прежнему не будем их учитывать.

17 Зак. 2575.

2. Постоянные издержки, пропорциональные мощности завода, т. е. максимальной скорости выпуска продукции. В предыдущем разделе показано, как нужно учитывать эти издержки при разработке системы регулирования.

3. Дополнительные издержки, пропорциональные скорости выпуска, когда она постоянна, которые нельзя немедленно уменьшить при уменьшении скорости выпуска. В первом приближении мы можем принять, что при увеличении скорости выпуска от устойчивого уровня дополнительные издержки будут пропорционально увеличиваться, но если скорость выпуска падает, существует



Фиг. 4.

фиксированный верхний предел скорости, с которой будут уменьшаться дополнительные издержки.

Предположим (фиг. 4), что $\mu(t)$ подвержена колебаниям с периодом $2/\alpha$ и амплитудой A. Наклон μ будет равен $\pm A\alpha$. Положим далее, что дополнительные издержки $\xi(t)$ могут уменьшаться только с наклоном $-\beta$, но возрастать могут так же быстро, как и μ. Ордината $\mu(0)$ равна A; наклон $\mu(t)$ равен $-A\alpha$ в интервале $0 \leqslant t < 1/\alpha$ и $A\alpha$ в интервале $1/\alpha \leqslant t < 2/\alpha$. Ордината $\xi(0)$ равна A; наклон $\xi(t)$ равен $-\beta$ в интервале $0 \leqslant t < t_a$, и $A\alpha$ в интервале $t_a \leqslant t < 2/\alpha$. Тогда интеграл от $\xi(t) - \mu(t)$ в интервале $0 \leqslant t < 2/\alpha$ равен площади треугольника, вершины которого обозначены черными точками. Эта площадь равна половине ординаты $\xi(1/\alpha)$, умноженной на t_a, причем $\xi(1/\alpha) = A - (\beta/\alpha)$. Величина t_a задается выражением

$$A\alpha\left(t_a - \frac{1}{\alpha}\right) = A - \beta t_a, \tag{83}$$

или

$$t_a = \frac{2A}{A\alpha + \beta}. \qquad (84)$$

Отсюда

$$\int_0^{2/\alpha} (\xi - \mu)\, dt = \frac{A\alpha - \beta}{2\alpha} \cdot \frac{2A}{A\alpha + \beta} = \frac{A(A\alpha - \beta)}{\alpha(A\alpha + \beta)}. \qquad (85)$$

Если 1 есть целое кратное от $2/\alpha$, то

$$\int_0^1 (\xi - \mu)\, dt = \frac{\alpha}{2} \int_0^{2/\alpha} (\xi - \mu) = \frac{A(A\alpha - \beta)}{2(A\alpha + \beta)} = C. \qquad (86)$$

Но для этого же интервала $\int_0^1 \mu dt = A/2$, откуда получаем отношение дополнительных издержек к выпуску:

$$C \cdot \frac{2}{A} = \frac{A\alpha - \beta}{A\alpha + \beta}. \qquad (87)$$

Следовательно, дополнительные издержки будут увеличиваться при возрастании амплитуды колебаний $\mu(t)$, т. е. они ведут себя в этом отношении подобно постоянным издержкам, и будут также повышаться при увеличении частоты μ.

При создании нашего оптимального критерия мы пренебрегли этим последним соображением. Поэтому можно исправить вид правила принятия решения уменьшением чувствительности $\mu(t)$ к $\theta_L(t)$ для высоких частот последнего за счет увеличения чувствительности $\theta_o(t)$. И снова утешительным является то, что полученные нами результаты согласуются с требованиями здравого смысла.

Предположение о синусоидальных колебаниях μ и ξ ведет к аналогичным результатам. Наконец, постоянные издержки и переменные издержки нужно рассматривать как предельные случаи дополнительных издержек, если ввести в рассмотрение набор различных категорий издержек, каждая из которых характеризуется своим значением β. Для переменных издержек β будет бесконечно большим, а для постоянных издержек β равно нулю.

Если можно определить некоторое среднее значение β, то оно может служить основой для нашего критерия производственных затрат.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общий вывод, который можно сделать из проведенного исследования при всем его несовершенстве, состоит в том, что основные идеи и принципиальная методика теории следящих систем действительно могут быть плодотворно использованы для анализа и разработки процедуры принятия решений, призванных обеспечить регулирование скорости выпуска. Конечно, большинство полученных нами выводов можно было, по крайней мере качественно, добыть и чисто интуитивным путем. Но и здесь интуиции помогают отправные идеи, которыми нас может снабдить теория следящих систем. Кроме того, более строгая методика, свойственная этой теории, позволяет формулировать полученные результаты с такой степенью точности, которая без ее использования была бы недостижима. Даже на данной зачаточной стадии теория регулирования в экономике позволяет использовать фактические данные для выработки конкретных правил поведения (правил принятия решений), которые в значительной мере реально приложимы к действительности.

БИБЛИОГРАФИЯ

В приведенном ниже перечне литературы указаны некоторые наиболее систематичные и удачные вводные курсы по теории следящих систем. Они расположены в порядке возрастающей сложности или детализации. В работах [3]—[5] и [7] имеется обширная библиография.

1. Lauer H., Lesnick R., Matson L. E., Servomechanism Fundamentals, New York, McGraw-Hill, 1947; русский перевод см.: Лауэр X., Лесник Р., Матсон Л., Основы теории сервомеханизмов, Госэнергоиздат, 1948.

Вводный курс, в котором вместо преобразования Лапласа используются дифференциальные уравнения. Содержит де-

тальный разбор поведения нескольких простых технических систем регулирования и дает ясное изложение основных понятий теории следящих систем.

2. James H. M., Nichols N. B., Phillips R. S. (Eds.), Theory of Servomechanisms, New York, McGraw-Hill, 1947; русский перевод см.: Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Р., Теория следящих систем, Издательство иностранной литературы, 1951.

Глава I «Следящие системы» содержит хорошее введение в основные понятия. В главе II «Математические основы» дано превосходное изложение метода преобразования Лапласа, его физического смысла и его связи с весовой функцией. Основные принципы и методы синтеза следящих систем обсуждаются в главе IV, а остальные главы посвящены более специальным вопросам.

3. Gardner M. F., Barnes J. L., Transients in Linear Systems, vol. I, New York, Wiley, 1942; русский перевод см.: Гарднер М., Барнс Дж., Переходные процессы в линейных системах, Физматгиз, 1961.

Ясное, систематическое изложение теории и методов применения преобразования Лапласа.

4. Brown G. S., Campbell D. P., Principles of Servomechanisms, New York, Wiley, 1948.

Посвящена примерно тем же вопросам, что и [3], но большее внимание уделено в ней вопросам синтеза, а не анализа систем.

5. McColl L. A., Fundamental Theory of Servomechanisms, New York, Van Nostrand, 1945; русский перевод см.: Макколл Л., Основы теории сервомеханизмов, Издательство иностранной литературы, 1946.

Стройное краткое изложение основных понятий теории с применением метода преобразования Лапласа.

6. Wiener N., The Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, New York, Wiley, 1949.

Введение в теорию задачи предсказания стохастических входных сигналов или нагрузок (см. также [2], гл. VI—VIII).

7. Oldenbourg R. C., Sartorius H., The Dynamics of Automatic Controls, ASME, 1948; русский перевод с немецкого издания см.: Ольденбург Р., Сарториус Г., Динамика автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1949.

Систематическое изложение теории автоматического регулирования с использованием методов преобразования Лапласа. Содержит подробное обсуждение вопросов фиксированного времени запаздывания, нелинейностей и импульсного регулирования (по последнему вопросу см. также [2], гл. V; [5], гл. X, и Приложение; [3], гл. IX).

Обсуждение и примеры использования следящих систем при изучении экономических систем можно найти в следующих работах:

8 Cooper W. W., "A. Proposal for Extending the Theory of the Firm", *Quart. J. Economics*, **65**, 87—109 (1951).

9. Morehouse N. F., Strotz R. H., Horwitz S. J., "An Electro-Analog Method for Investigating Problems in Econometric Dynamics: Inventory Oscillations", *Econometrica*, **18**, 313—328 (1950).

10. Enke S., "Equilibrium Among Spatially Separated Markets: Solution by Electric Analogue", *Econometrica*, **19**, 40—47 (1951).

11. Wiener N., Cybernetics, New York, Wiley, 1948; русский перевод см.: Винер Н., Кибернетика, Изд-во «Сов. радио», 1958.

12. Goodwin R. M., "Econometrics in Business-Cycle Analysis"; в книге Hansen A. H., Business Cycles and National Income, New York, Norton, 1951; русский перевод см.: Хансен Э., Экономические циклы и национальный доход, Издательство иностранной литературы, 1959, гл. XXII.

ЭЛЕКТРОННАЯ МОДЕЛЬ-АНАЛОГ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ [1])

О. ДЖ. М. СМИТ, Х. Ф. ЭРДЛИ

(США)

Научный метод исследования обычно состоит в том, что на основании некоторых выдвинутых гипотез математическими или другими логическими приемами получают определенные выводы, которые могут быть проверены на практике. Для таких теоретических предсказаний лучше всего пригоден язык математики, в то время как для описаний чаще всего приходится пользоваться обычным языком. Применение геометрических методов является важным подспорьем при использовании математического аппарата. Например, математические зависимости колебательных процессов можно представить в виде векторных диаграмм, которые часто увеличивают наглядность. Затем эти векторные диаграммы можно преобразовать в круговые или сходные диаграммы, являющиеся геометрическими местами концов векторов, или годографами. Еще одним примером является метод конформного отображения, при котором полюсы и нули функции представлены контурами в комплексной плоскости.

Другим методом является использование эквивалентных схем, с помощью которых магнитные и механические задачи или задачи теории поля могут быть сведены к схемным задачам. Иногда процесс создания зрительного образа явления происходит в несколько стадий; так, например, при исследовании волноводов задача сперва преобразуется в эквивалентную схему, затем

---

[1]) Smith O. J. M., Erdley H. F., *Electrical Engineering*, **71**, № 4, 362—366 (1952).

представляется в виде векторных диаграмм и, наконец, получает математическую, или аналитическую формулировку.

Одним из методов анализа явлений является метод аналогий (моделей). Модель-аналог представляет собой инструмент для наглядного изображения задачи. В данной статье аналогия используется для представления экономической проблемы при помощи понятий теории цепей.

МАКРОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КАЛЕЦКОГО

Эта система была впервые изложена в докладе М. Калецкого, представленном на собрании эконометрического общества в октябре 1933 г. в г. Лейдене [1].

Один из основных постулатов макродинамической системы Калецкого состоит в том, что поставки капитальных благ запаздывают по отношению к инвестиционным заказам на фиксированное время, необходимое для производства соответствующих товаров (измеряемое в годах). Этот постулат выражается уравнением

$$L(t)=I(t-\theta) \qquad (1)$$

(обозначения см. Приложение I).

Общее количество наличного основного капитала равно интегралу с переменным верхним пределом, взятому от поставок произведенных товаров за вычетом их количества, необходимого для возмещения. Этот процесс выражается уравнением

$$K=\int_0^{\tau}(L-U)\,dt. \qquad (2)$$

Предполагается, что скорость выпуска капитальных благ или та составляющая национального дохода [1]), которая обусловлена их производством, равна средней скорости

[1]) Здесь и далее под «национальным доходом» всюду подразумевается конечный продукт. — *Прим. ред.*

капиталовложений за последние θ лет, т. е. за время запаздывания. При этом подразумевается, что в национальный доход входит заработная плата, выплаченная прежде, чем продукт поступил в продажу. Процесс описывается уравнением

$$A=\frac{1}{\theta}\int_{t=\tau-\theta}^{\tau} I\,dt=\frac{1}{\theta}\int_{0}^{\tau} I(t)\,dt-\frac{1}{\theta}\int_{0}^{t=\tau-\theta} I(t)\,dt. \qquad (3)$$

Этот определенный интеграл может быть представлен в виде суммы двух интегралов. Второй интеграл можно упростить, используя подстановку $t=y-\theta$ и заменяя скорость капиталовложений точной функцией скорости поставок:

$$\frac{1}{\theta}\int_{0}^{y=\tau} I(y-\theta)\,dy=\frac{1}{\theta}\int_{0}^{y=\tau} L(y)\,dy=\frac{1}{\theta}\int_{0}^{t=\tau} L(t)\,dt. \qquad (4)$$

После подстановки (4) в выражение (3) получим

$$A=\frac{1}{\theta}\int_{0}^{\tau}(I-L)\,dt. \qquad (5)$$

Таким образом, скорость выпуска капитальных благ равна интегралу от разности между скоростью инвестиционных заказов и скоростью фактических поставок.

Национальный доход образуется из двух частей: выпуска капитальных благ и потребления товаров,

$$B=A+C. \qquad (6)$$

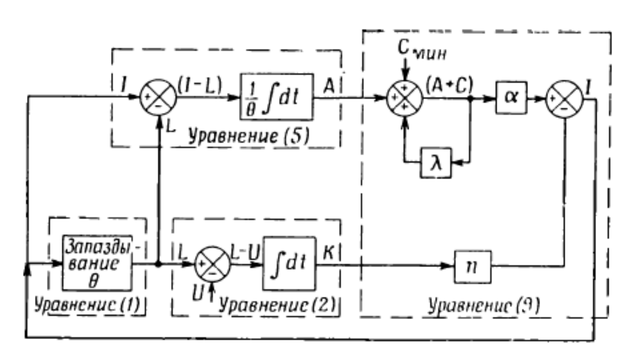
Второй основной постулат Калецкого состоит в том, что потребление равно сумме некоторого не поддающегося сокращению минимального потребления и составляющей, пропорциональной национальному доходу. Введение этой второй составляющей равносильно введению в экономику положительной обратной связи, которая представляется параметром λ:

$$C=C_m+\lambda B. \qquad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) получаем

$$B = \frac{A + C_m}{1 - \lambda}. \tag{8}$$

Это уравнение показывает, что национальный доход изменяется обратно пропорционально разности между единицей и коэффициентом положительной обратной связи между национальным доходом и потреблением. Если λ стремится к единице, то национальный доход будет бесконечным.

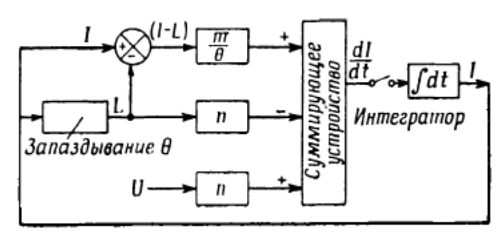


Фиг. 1. Модель-аналог экономической системы Калецкого.

Инвестор старается придерживаться тактики, дающей максимальную прибыль. Чем больше национальный доход, тем выше потребность в капитальных благах и больше возможность их продажи. Поэтому он хотел бы увеличить вложения пропорционально увеличению национального дохода. Это выражается коэффициентом α. Аналогично если наличность основного капитала велика, то возникает меньше стимулов для производства нового промышленного оборудования. Поэтому инвестор будет производить вложения так, чтобы величина капиталовложений уменьшалась по мере увеличения наличного основного капитала. Оба эти фактора отражаются уравнением

$$I = \alpha B - nK = \frac{\alpha (A + C_m)}{1 - \lambda} - nK. \tag{9}$$

Блок-схема, соответствующая основным уравнениям (1), (2), (5) и (9), приведена на фиг. 1. Инвестиционные заказы поступают в звено запаздывания (θ) и выходят оттуда через небольшой промежуток времени в виде фактических поставок L. Эти поставки, за вычетом поставок на возмещение, можно проинтегрировать для определения общего количества наличного основного капитала. Разность между инвестиционными заказами и фактическими поставками составляет продукцию, находящуюся в стадии изготовления, а интеграл от этой



Фиг. 2. Преобразованная модель экономической системы.

разности определяет часть национального дохода, получающуюся за счет производства капитальных благ. Последний блок, соответствующий уравнению (9), включает как коэффициент положительной обратной связи потребителей λ, так и планы получения максимальной прибыли инвестором.

Не представляет трудностей создать электронную аналогию этой блок-схемы, однако ее предварительно можно несколько упростить. Поскольку наибольший интерес представляют динамические характеристики, нет нужды выполнять эту модель с усилителями постоянного тока, ибо постоянными величинами, такими, как минимальный входной сигнал C, можно пренебречь. Поскольку в цепи обратной связи λ отсутствуют динамические факторы, ее можно представить как изменение масштаба в соответствии с уравнениями:

$$m=\frac{\alpha}{1-\lambda}, \tag{10}$$

$$I=m(C_m+A)-nK. \tag{11}$$

Если суммирование и установка коэффициентов в уравнении (9) выполняются на входе интегратора, то потребуется только один интегратор. С учетом этих преобразований систему можно представить блок-схемой фиг. 2, в которой используются только один сумматор, один интегратор и одно звено фиксированного запаздывания.

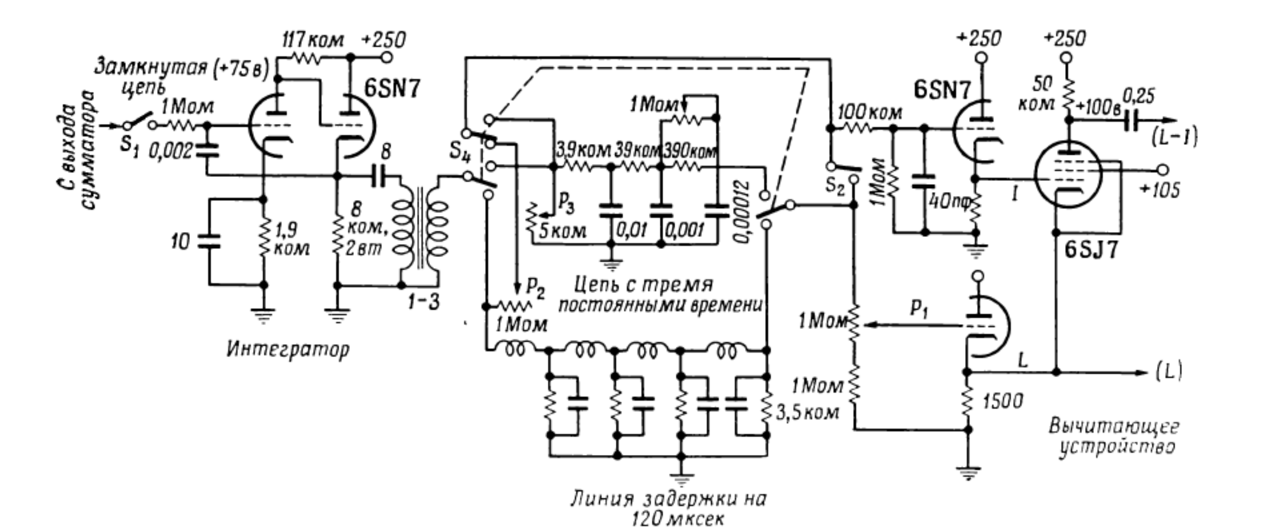
МОДЕЛЬ-АНАЛОГ

Эта система была сконструирована с масштабом времени 2000 *мксек* = 1 год. Из приведенных на фиг. 3 и 4 принципиальных схем [1]) видно, что сумматор, интегратор и вычитающее устройство являются типовыми блоками. Однако инженерная реализация хорошего звена фиксированного запаздывания не столь проста. Приближенно его можно представить линией задержки на 120 *мксек* с некоторой компенсацией ослабления. Менее точным соответствием является цепочка из *RC*-элементов с тремя различными постоянными времени, имеющая такое же время фиксированного запаздывания.

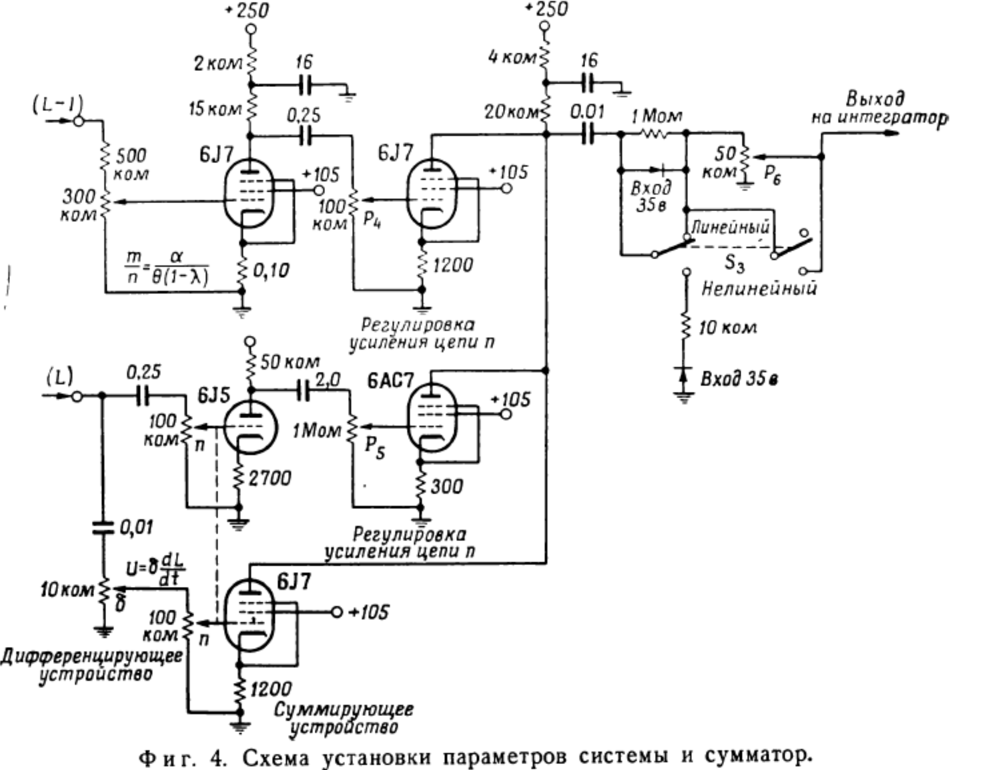
Сразу же возникает вопрос о форме переходной характеристики поставок капитальных благ. Среднее фиксированное запаздывание равно 0,6 года, но поскольку для некоторых товаров требуется всего лишь несколько месяцев, а для других — ряд лет, то, по-видимому, более реально принять, что переходная характеристика для капитальных благ совершенно подобна переходной характеристике цепочки из трех последовательно соединенных *RC*-ячеек с различными постоянными времени. Эта модель обеспечивает изучение влияния запаздывания любого вида. Наладка системы сводится к тому, чтобы установить коэффициенты усиления для цепей m и n, равные тем коэффициентам усиления, которые вычислены из уравнений системы для некоторой характерной частоты, например 500 *гц*, что соответствует в реальной системе 1 периоду за 10 лет.

---

[1]) Пояснения к фиг. 3 и 4 см. Приложение II. — *Прим. ред.*



Фиг. 3. Интегратор, блок запаздывания и вычитающее устройство.
См. также Приложение II.



Фиг. 4. Схема установки параметров системы и сумматор.

См. также Приложение II.

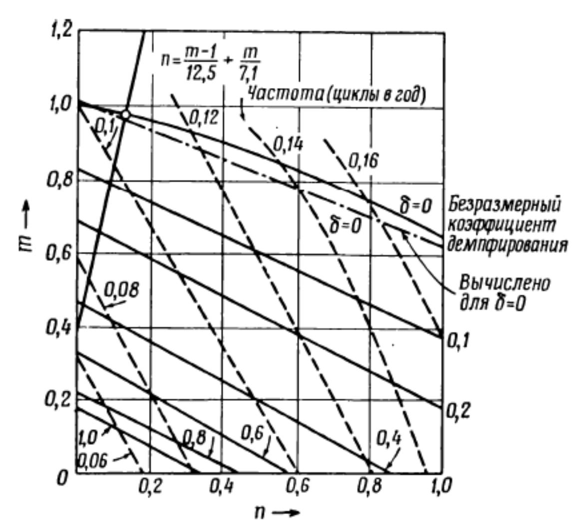
Модель подобного типа можно практически использовать двояким образом. Можно измерить амплитуду и фазу частотной характеристики разомкнутой системы и исследовать их обычными методами теории следящих систем для ответа на вопрос об ее устойчивости, определения степени устойчивости и частоты резонанса. Затем можно установить зависимость степени устойчивости от различных параметров и их отношений. Второй метод использования этой модели состоит в том, что систему замыкают и подают на нее возмущение, измеряя при этом декремент затухания на период или на радиан колебаний переходного процесса, вызванного этим возмущением.

И в том, и в другом случае извлекаемая полезная информация представлена в виде резонансной частоты и безразмерного коэффициента демпфирования. Амплитуда колебаний в линейной динамической системе несущественна. Она имела бы значение при наличии некоторой нелинейной экономической функции, которую нужно было бы ввести в модель. В этом случае можно было бы выразить отношение амплитуд колебания и переходного процесса через экономические величины и сравнить его с ожидаемым или известным результатом. Тем не менее линейная система весьма ценна, так как она дает наглядную картину влияния различных экономических факторов. Более того, она позволяет определить, возможна ли стабилизация системы подобного типа.

Интересно отметить, что описываемая система колеблется с частотой 1 период в 10 лет, причем коэффициент демпфирования чрезвычайно мал и систему очень трудно стабилизировать. Возможный способ использования этой модели состоит в подборе для нее пригодной схемы стабилизации, которая затем должна быть заново истолкована на языке экономических величин.

В качестве одной из пробных гипотез для дальнейших исследований была введена амортизация, пропорциональная скорости изменения поставок товаров. Это означает, что, когда выпуск продукции падает, имеется тенденция продолжать использовать старое оборудование, а когда выпуск продукции увеличивается, возникает

тенденция к замене устаревшего оборудования, с тем чтобы использовать повышенную эффективность нового оборудования. Интересно отметить, что добавление этого слагаемого, показанного на фиг. 4 внизу, уменьшает запас устойчивости системы и уменьшает ее демпфирование.

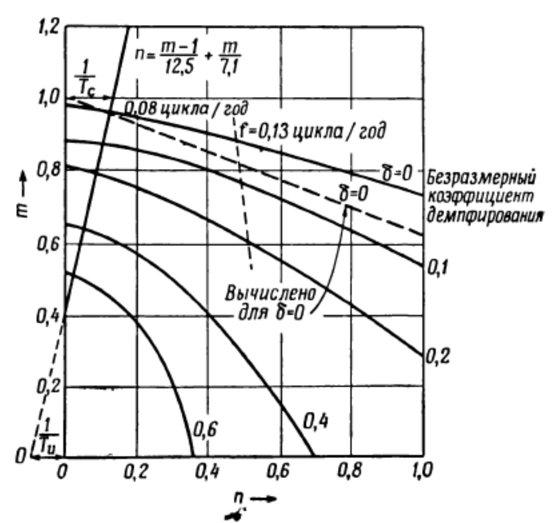


Фиг. 5. Устойчивость экономической системы.

Линия задержки с $\theta = 0,6$ года.

В принципе имеются два фактора, способствующие неустойчивости системы. Один из них — потеря информации из-за фиксированного запаздывания θ. Это означает, что инвестор не знает, что сделали остальные инвесторы, до тех пор, пока их продукция не появится на рынке. В действительности это может быть и не так. Может оказаться, что существуют некоторые зависимости в экономике, которые позволяют инвестору делать прогнозы на будущее и знать, какие изменения произойдут в поставках капитальных благ. Однако, если такая информация отсутствует, это фиксированное запаздывание ведет к неустойчивости.

Вторым фактором является цепь положительной обратной связи по потреблению. Пока потребители увеличивают потребление пропорционально национальному доходу (вместо того, чтобы делать сбережения), имеется налицо процесс накопления, способствующий неограниченному возрастанию амплитуды колебаний. Однако в



Фиг. 6. Устойчивость экономической системы с тремя звеньями на три различных постоянных времени.

$\theta = 0,6$ года.

реальной экономической системе колебания ограничиваются некоторыми нелинейными составляющими, которые здесь не рассматриваются.

При некоторых значениях m и n в модели возникают колебания. Измеренные зависимости приведены на фиг. 5 и 6. Кривая для $\delta = 0$ соответствует незатухающим колебаниям, а кривые для положительных δ — затухающим колебаниям. Легко видеть, что при увеличении как m, так и n неустойчивость системы возрастает. При этом изменения m оказывают большое влияние на запас устойчивости, в то время как изменения n

существенно влияют на частоту колебаний. Замена одного фиксированного запаздывания тремя последовательно соединенными звеньями с различными постоянными времени увеличивает запас устойчивости и снижает частоту колебаний.

АНАЛИЗ

Поскольку известно, что реальная экономика испытывает колебания, рассмотрение можно ограничить случаем незатухающих колебаний, для которых $\delta = 0$, а m и n можно взять в виде средних параметров большого числа периодов устойчивых колебаний.

Уравнение (11) справедливо как для мгновенных, так и для средних значений переменных. Если предположить, что средний уровень экономики остается примерно постоянным, то средний уровень капиталовложений и средний уровень производства (каждый порознь) равны среднему значению износа U_0. Это выражается уравнением

$$U_0 = m(C_m + U_0) - nK_0. \qquad (12)$$

Следует задать две постоянные времени. Постоянная времени потребления равна времени, которое потребуется для того, чтобы полностью исчерпать стоимость наличного основного капитала, если бы он расходовался со скоростью $C_{мин.}$. Постоянная времени износа равна времени, которое необходимо для полного износа всего наличного основного капитала. В соответствии с этим можем написать

$$T_c = \frac{K_0}{C_m} \approx 7{,}1 \text{ года}, \qquad (13)$$

$$T_u = \frac{K_0}{U_0} \approx 12{,}5 \text{ года}. \qquad (14)$$

Подставляя эти параметры в уравнение (12), получим

$$n = \frac{m}{T_c} - \frac{1-m}{T_u}. \qquad (15)$$

Постоянная времени потребления примерно равна m/n лет. Относительно же постоянной времени износа пока трудно сказать что-либо определенное, так как система по существу от нее не зависит.

Для сравнения вычисленной частоты с величиной, полученной из наблюдений, необходимо установить другую зависимость между m и n. Математическое определение границ устойчивости данной системы можно получить, если переписать уравнения (1), (2), (5) и (11) в комплексной форме:

$$L = Ie^{-j\omega\theta}; \quad K = \frac{L}{j\omega}; \quad A = \frac{I-L}{j\omega}; \quad I = mA - nK. \qquad (16)$$

Эти уравнения можно разрешить относительно одной переменной. Тогда в комплексной форме можно записать:

$$1 - G = 1 - \left(\frac{m}{\omega\theta} + \frac{n}{\omega}\right)\sin\omega\theta + j\left[\frac{m}{\omega\theta} - \left(\frac{m}{\omega\theta} + \frac{n}{\omega}\right)\cos\omega\theta\right] = 0, \qquad (17)$$

где G — частотная характеристика разомкнутой системы. Приравнивая нулю действительную и мнимую части этого уравнения, получаем

$$\frac{\sin\omega\theta}{\omega\theta} = \frac{1}{m\left(1 + \frac{n\theta}{m}\right)} \text{ (условие равенства амплитуд)}, \qquad (18)$$

$$\cos\omega\theta = \frac{1}{1 + \frac{n\theta}{m}} \text{ (условие равенства фаз)}. \qquad (19)$$

Разделив (18) на (19), получим

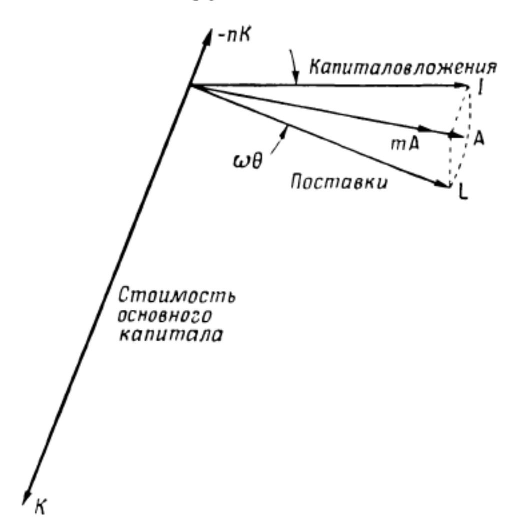
$$\omega\theta = m \operatorname{tg}\omega\theta. \qquad (20)$$

Исключение из уравнений (18) и (19) тригонометрических функций дает зависимость между m, n, ω и θ, что необходимо для определения границ устойчивости:

$$\left(\frac{\omega\theta}{m}\right)^2 + 1 = \left(1 + \frac{n\theta}{m}\right)^2, \qquad (21)$$

$$(\omega\theta)^2 = 2mn\theta\left(1 + \frac{n\theta}{2m}\right). \qquad (22)$$

Векторная диаграмма, приведенная на фиг. 7, показывает фазовые соотношения между входными величинами (капиталовложения, выпуск и поставки). Можно видеть, что сумма величин mA и $-nK$ при этих условиях образует вычисленные выходные данные по капиталовложениям, соответствующие по фазе (направлению) и величине вектору входных данных.



Фиг. 7. Векторная диаграмма экономической системы Калецкого.

$m=0{,}95$; $n=0{,}12$; $\theta=0{,}6$ года; $f=0{,}1$ цикла в год.

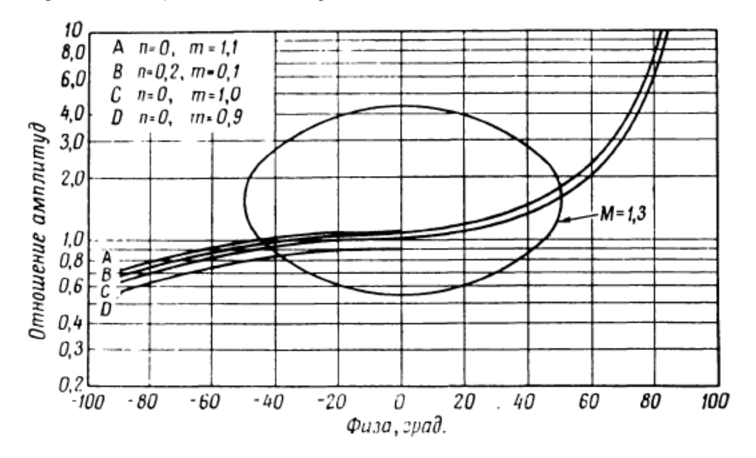
Частотная характеристика разомкнутой системы (отношение вычисленных капиталовложений, являющихся выходной величиной, к действительным капиталовложениям, являющимся входной величиной) для данной системы равна

$$G(j\omega\theta)=\frac{1}{j\omega\theta}\left[m-(m+n\theta)\,e^{-j\omega\theta}\right]. \tag{23}$$

На фиг. 5 представлены график уравнения (15) (параметры системы) и графики уравнений (20) и (22). Условие $\delta=0$ соответствует незатухающим колебаниям.

В точке пересечения кривых получаем $m = 0{,}95$, $n = 0{,}13$ и период 9 лет.

Постоянная времени износа не включена в систему. Если возрастает m (рост кредита или оптимизма), запас устойчивости системы сильно сокращается, а частота колебаний уменьшается незначительно. Если же увеличивается n, т. е. уменьшается постоянная времени потребления, то запас устойчивости системы несколько



Фиг. 8. Частотная характеристика разомкнутой системы.

уменьшается, а частота колебаний значительно возрастает. Если фиксированное запаздывание, определяемое производством, увеличивается, запас устойчивости системы уменьшается и уменьшается также частота колебаний.

На фиг. 8 приведены кривые изменения частотной характеристики разомкнутой системы в прямоугольных координатах для некоторых значений m и n. Легко видеть, что почти горизонтальный ход этой кривой напоминает функцию чистого времени запаздывания[1]), которую трудно стабилизировать, если только не вводить

[1]) Продолжительность фиксированного запаздывания θ. — *Прим. ред.*

большую постоянную времени. Большая постоянная времени дает ослабление на 5 *дб* при резонансной частоте. Если T_s — стабилизирующая постоянная времени, то

$$T_s = \frac{2}{\omega_0} = \sqrt{2 \theta T_c}. \tag{24}$$

Таким образом, эта постоянная времени примерно в 1,5 раза больше среднего геометрического из произведения фиксированного запаздывания производства на постоянную времени потребления.

Метод практического осуществления этого результата в области экономических явлений должен быть предметом особого изучения. Однако здесь необходимо сделать предостережение. Каковы бы ни были предлагаемые средства регулирования, состоящие, например, в узаконенных или эпизодических манипуляциях с величиной налогов, допустимыми капиталовложениями, субсидиями, правительственными заказами и т. п., инвестору эти условия известны и он принимает в расчет новую функцию для получения максимальной прибыли. Это создает цепь отрицательной обратной связи, приспосабливающую параметры α и n к новым условиям и почти полностью сводящую на нет эффективность предложенных средств регулирования.

Переходный процесс в системе, имеющей столь малое затухание, как рассматриваемая система, будет продолжаться много периодов. Это означает, что, переходный процесс, вызванный, скажем, первой мировой войной, все еще по существу не закончился, а переходный процесс, вызванный войной Севера против Юга, хотя и невелик, но все еще ощутим. События, приведшие ко второй мировой войне, были откликом системы на предыдущие переходные процессы, но начало войны означало нелинейное добавление энергии в систему, т. е. вызвало новый переходный процесс.

Эта модель является чрезмерным упрощением, так как она пренебрегает нелинейностями, которые имеют чрезвычайно большое значение. Тем не менее эта линейная модель позволяет выявить некоторые существен-

ные черты поведения системы, и такое необычное применение метода моделирования на электронной схеме открывает интересные перспективы для изучения экономических систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Обозначения

θ — фиксированное запаздывание, *годы;*

C — размер личного потребления капиталистов, *млрд/год*;

U — требуемая скорость возмещения промышленного оборудования;

A — скорость производства капитальных благ;

$B = A + C$ — национальный доход (конечный продукт);

I — скорость поступления инвестиционных заказов;

L — скорость фактических поставок по заказам;

K — общая наличность основного капитала, *млрд*;

$m = \partial I/\partial A$ — увеличение скорости инвестиционных заказов при единичном приращении скорости производства (безразмерная величина);

$n = -\partial I/\partial K$ — уменьшение скорости поступления инвестиционных заказов при единичном приращении наличности основного капитала (положительный параметр, единица измерения — величина, обратная году).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Пояснения к фиг. 3 и 4

Потенциометр P_1 на фиг. 3 должен быть так отрегулирован, чтобы при замкнутом ключе S_2, разомкнутом ключе S_1 и подаче испытательного сигнала на интегратор

выходной сигнал $L-I$ был равен нулю. Этим осуществляется регулировка баланса вычитающего устройства. P_2 служит для компенсации затухания в линии задержки; он должен быть установлен таким образом, чтобы при установке ключа S_4 в нижнем положении величина I была равна величине L. Потенциометр P_3 обеспечивает нагрузку на вторичную обмотку низкочастотного трансформатора, эквивалентную нагрузке со стороны линии задержки. Он должен быть отрегулирован таким образом, чтобы величина I не зависела от положения ключа S_4.

Потенциометр P_6 на фиг. 4 является регулятором усиления петли m. При $m=1$, $n=0$ и ключе S_4 в нижнем положении он должен быть установлен таким образом, чтобы коэффициент усиления разомкнутой системы был равен 0,995 при частоте 500 *гц* и напряжении 2 *в*. Потенциометр P_5 является регулятором усиления петли n. При $m=0$, $n=1$ и ключе S_4 в нижнем положении коэффициент усиления необходимо установить равным 1,6 на частоте 500 *гц*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalecki M., „A Macrodynamic Theory of Business Cycles", *Econometrica,* **3**, № 3, 327—344 (1935).
2. Neumann J., „A Model of General Economic Equilibrium", *Rev. Econ. Stud.,* **13** (1), № 33, 1—9 (1945—1946).
3. Hawkins D., „Some Conditions of Macroeconomic Stability", *Econometrica,* **16**, № 4, 309—352 (1948).
4. Wood M. K., Dantzig G. B., „Programming of Interdependent Activities. Part I: General Discussion; Part II: Mathematical Model", *Econometrica,* **17**, № 3, № 4, 193—211 (1949).
5. Simon H. A., „An Exploration Into the Use of Servomechanisms Theory in the Study of Production Control», Cowles Commission Discussion Paper, Economics, № 288, Aug. 17, 1950.
6. Morehouse N. F., Strotz R. H., Horowitz S. J., „An Electro-Analog Method for Investigating Problems in Economic Dynamics: Inventory Oscillations", *Econométrica,* **18**, № 4, 313—328 (1950).

7. Goodwin R. M., „The Non-linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles", *Econometrica,* **18**, № 4, 1—17 (1951).
8. Enke S., „Equilibrium Among Spatially Separated Markets: Solution by Electric Analog", *Econometrica,* **19**, № 1, 40—47 (1951).
9. Strotz R. H., Calvert J. F., Morehouse N. F., „Analog Computing Techniques Applied to Economics", *Trans. AIEE,* **70**, P. I., 557—563 (1951).

ЭЛЕКТРОННЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ [1])

О. ДЖ. М. СМИТ

(США)

Использование электрических моделей и вычислительных устройств для решения экономических задач вызвало огромный интерес в США. Модели подобного типа полезны как для экономиста-практика, так и для исследователя-теоретика. Прежде всего модель позволяет предсказать характер изменений, происходящих в экономической системе в результате таких воздействий, как введение контроля над ценами, удорожание жизни, изменение шкалы налогового обложения, изменение деловой политики, введение правительственного регулирования и т. п. Любую область экономической деятельности можно представить в таком виде, который позволяет найти пути оптимального использования имеющихся в распоряжении фондов.

Другой областью применения моделей является проверка гипотез. Можно выдвинуть то или иное объяснение или сформулировать определенную гипотезу относительно данной экономической системы, а из этой гипотезы вывести уравнения, описывающие характер экономики, в условиях которой мы живем. Но обычно эти уравнения настолько трудно разрешимы, что нет возможности определенно установить, соответствует ли сделанная гипотеза действительности. С помощью моделей можно сконструировать экономическую систему, отвечающую данной гипотезе, и сравнить поведение этой системы с известными реакциями реальной экономики.

---

[1]) Smith O. J. M., *California Engineer*, p. 14—19, Nov. 1953.

Таким путем можно получить некоторые критерии справедливости выдвинутых гипотез.

В данной работе не ставится задача классифицировать все типы экономических задач и разобрать все типы моделей, которые для них могут быть построены. Будут обсуждены лишь некоторые относительно простые задачи и описаны электронные модели, которые уже были построены для их решения.

Рассмотрение моделей представляется весьма ценным, даже вне зависимости от реального создания модели, так как оно вводит экономиста в незнакомую ему доселе область векторных диаграмм, преобразования Лапласа, анализа устойчивости замкнутых систем, вопросов влияния «шумов» и применения стабилизирующих цепей. Оно показывает также, какие большие преимущества дает использование метода частотных характеристик и понятия «белого шума» [1]).

ЛИНЕЙНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОСТОРОННЕГО ДЕЙСТВИЯ

Многие экономические задачи можно описать системой из n уравнений с n неизвестными. Например, цена бобовых консервов может рассматриваться как функция стоимости консервных банок, цены рабочей силы на консервном заводе и в сельском хозяйстве, погоды за предыдущий год, ставки процента и т. д. Однако многие факторы, определяющие стоимость бобовых консервов, сами являются экономическими факторами. Поэтому задача сводится к определению большого количества цен, зависящих от большого числа параметров, включая и скорость относительного изменения цен.

---

[1]) Понятие «шум» применяется к сигналу со случайными флуктуациями, не содержащему периодических составляющих. Шум описывается спектральной плотностью в единицах мощности на единицу частоты. Понятие «белый шум» относится к случайному сигналу с одинаковой спектральной плотностью на всех частотах. Мощность, выраженная в ваттах на цикл в год, одинакова как для 365 циклов в год, так и для частоты в один цикл в год.

Макроэкономической задачей того же типа является статическое описание отрасли экономики в виде связанной последовательности производственных процессов, каждый из которых нуждается в некоторой части продукции, выпускаемой рядом других предприятий, и продукция которого в свою очередь потребляется другими предприятиями или представляет собой потребительские товары. Это описание приводит к n уравнениям, в которых переменными являются количества продукции, выпускаемой каждым предприятием, а в роли параметров выступают количества стали, кобальта, труда и т. п., необходимые для выпуска единицы продукции на каждом предприятии. Если существует совместное решение этой системы уравнений, при котором все переменные положительны, то экономическая система в целом является продуктивной.

Моделью подобной системы может служить совокупность большого числа источников напряжения, каждый из которых представляет скорость выпуска какого-либо товара. Каждый производственный процесс описывается линейным уравнением, которое можно представить в виде совокупности напряжений, пропорциональных отдельным членам уравнения, причем сумма этих напряжений равна нулю. Параметры задаются установкой потенциометров; отдельные элементы производственного процесса представлены токами, которые протекают по потенциометрам, присоединенным к соответствующим входным напряжениям. Токи, текущие по потенциометрам, суммируются в n различных индикаторах тока. Решение получается по методу «проб и ошибок» путем систематического изменения напряжений до тех пор, пока отсчет всех индикаторов тока не станет равным нулю. Входные и выходные сигналы представлены токами противоположных полярностей, так что все источники напряжения должны иметь средний вывод.

По существу этот процесс соответствует «обращению» матрицы n-го порядка. При использовании усилителей, проводящих только в одном направлении, метод «проб и ошибок» может быть исключен. Каждое уравнение можно разрешить относительно искомого товара,

который будет выражен входным током усилителя. При этом каждый усилитель обеспечивает напряжение возмущения для последующих процессов. При таком способе могут быть введены и динамические элементы, например время запаздывания производства и емкость складских помещений.

Кроме того, подобную модель можно использовать и для определения экономических параметров, т. е. скорости изменения одной переменной по отношению к другой, или установки потенциометров при условии, что задано некоторое соотношение цен в экономике.

Следует различать два возможных типа моделей. Только что описанная модель является моделью одностороннего действия (или моделью «причина — следствие»), т. е. моделью, в которой мощность поступает от источников напряжения к индикаторам тока, но не может протекать в обратном направлении. Это модель, в которой каждый элемент представляет частное уравнение потока в экономической системе. Двусторонняя модель может быть представлена в виде n-контурной электрической цепи, причем вся цепь отображает экономическую систему в целом.

Параметры двухсторонней модели отличаются от параметров односторонней модели. Возьмем, например, скорость изменения цены бобовых консервов в зависимости от цены рабочей силы на консервных заводах. Экономика является замкнутой системой, поэтому изменение цены бобовых консервов со временем отразится на цене рабочей силы в консервной промышленности. Теперь нельзя сказать, какая из цен является причиной, а какая следствием; обе они являются и тем и другим.

В действительности существует два потока — один непосредственно от рабочей силы к бобовым консервам и другой — через всю цепь от стоимости бобовых консервов обратно к цене рабочей силы в консервной промышленности. Поэтому измеренная скорость изменения цены бобовых консервов в зависимости от цены рабочей силы в консервной промышленности в реальной экономике является параметром замкнутой системы и не принадлежит к величинам, которые могут быть исполь-

зованы в эквивалентной разомкнутой системе или модели одностороннего действия.

Это является весьма существенным замечанием, поскольку некоторые экономисты совершают ошибку, используя параметры замкнутой системы так, как если бы они были измерены на изолированном экономическом звене с односторонним действием; при этом предполагается, что цена рабочей силы в консервной промышленности влияет только на стоимость бобовых консервов и все это изолировано от окружающего мира.

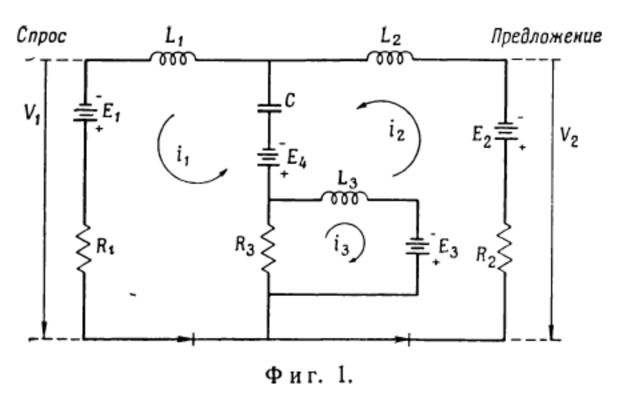
Если известны только параметры замкнутой системы, можно с помощью модели определить истинные значения параметров разомкнутой системы. На модели одностороннего действия это производится методом «проб и ошибок» путем регулировки потенциометров при ненагруженных усилителях до тех пор, пока изменения в цене рабочей силы и общих затрат на нее не вызовут требуемых изменений в стоимости бобовых консервов при условии, что вся система находится в действии. Таким путем для каждого измеренного параметра замкнутой системы можно определить поправку для перехода к разомкнутой системе. Величина каждого полученного таким образом параметра дает экономисту возможность определить долю прямого воздействия и долю обратной связи системы.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДВУХСТОРОННЕГО ДЕЙСТВИЯ

Можно создать электрическую схему, содержащую емкости и индуктивности или электронные интеграторы и дифференциаторы, которая будет моделью динамической двухсторонней экономической системы. Классический пример этого дает изучение колебаний запасов продукции.

Рассмотрим предприятие, выпускающее товары, которые хранятся на складе и впоследствии продаются. Если запасы уменьшаются, то через небольшое время запаздывания возрастают темпы роста выпуска продукции, необходимые для пополнения запасов. Если же

запасы чрезмерно возрастают, то торговая сеть с небольшим запаздыванием воспринимает новые цены и увеличивает продажу. Таким образом, очень приближенно запасы можно представить, как это сделано на фиг. 1, конденсатором C, причем количество электричества (заряд) соответствует количеству товаров [1]). Конденсатор C заряжается от батареи E_2 через индуктивность L_2,



Фиг. 1.

представляющую инерционность производства, и разряжается через индуктивность L_1, характеризующую инерционность рынка, на цепь, имитирующую характеристику потребительского спроса.

Соотношение между ценой, определяемой спросом потребителей, и скоростью продажи линейно апроксимируется с помощью величин E_1 — наблюдаемой максимальной цены при нулевой скорости продажи, R_1 — скорости уменьшения цены, необходимой для увеличения скорости продажи, и E_1/R_1 — кажущейся максимальной скорости продажи при цене, равной нулю. Соотношение между скоростью продажи и ценой, определяемой производством — предложением, линейно апроксимируется с помощью величин E_2 — цены, необходимой для получения нулевой скорости продажи, и R_2 — скорости увеличения цены в зависимости от скорости продажи. (Для

[1]) Пример заимствован из статьи Штроца, Калверта и Морхауза [6].

всех отраслей, в которых эффективность возрастает при увеличении выпуска продукции, R_2 должно быть отрицательным.) В этой модели напряжение соответствует цене за единицу продукции, ток — скорости продажи, выражаемой в числе единиц на время, мощность — денежной стоимости потока скорости продажи, заряд — количеству продукции и энергия—общей денежной стоимости потока производства.

Поскольку E_1 больше E_2, очевидно, что источник энергии (или денег) для этой экономической системы обеспечивается за счет потребителей. Включенные в цепь диоды позволяют деньгам поступать только от потребителей к производителям, но не наоборот. Диод со смещением в цепи запасов можно использовать для того, чтобы величина запасов не могла стать отрицательной. Эта система является линейной, если только переходные процессы не настолько велики, что запасы уменьшаются до нуля, а скорость производства достигает насыщения, или же скорость производства или продажи приближается к нулю. Испытание на устойчивость достаточно провести для линейной системы, так как нелинейности лишь слабо сказываются на устойчивости, хотя они и уменьшают эффективность экономической системы.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОДНОСТОРОННЕГО ДЕЙСТВИЯ

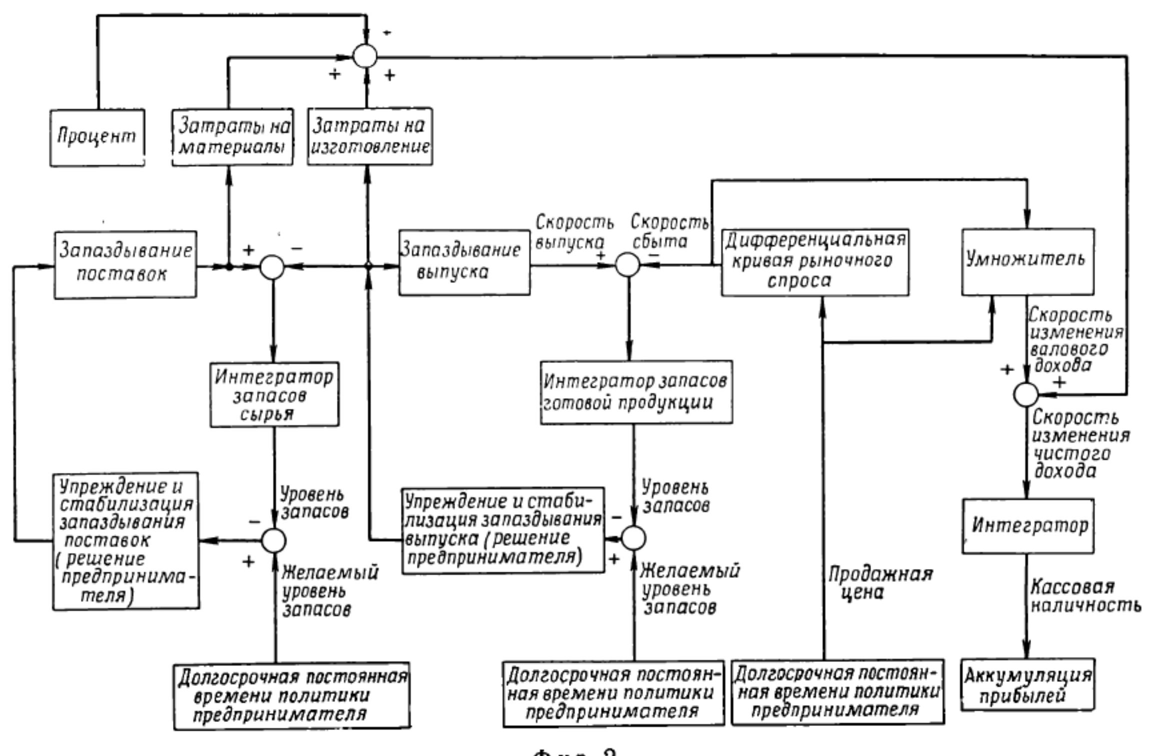
Модель одностороннего действия состоит из набора усилителей, которые могут быть включены либо как буферные каскады для уменьшения сопротивления, либо как генераторы нелинейных функций, либо как интеграторы или дифференциаторы. Они используются совершенно так же, как при решении задач теории следящих систем с помощью вычислительных устройств непрерывного действия. При исследовании колебаний запасов и скорости выпуска продукции одним из входных сигналов системы является желаемый уровень запасов, который определяется деловой политикой (фиг. 2). Из этой вели-

чины вычитается действительный уровень запасов, и полученная ошибка усиливается усилителями, имитирующими политику планирования производства. Выходной сигнал, определяющий скорость изменения выпуска, через линию задержки поступает на интегратор, с помощью которого определяется приращение запасов.

Кривая цена — предложение осуществлена в виде источника напряжения с нелинейным внутренним сопротивлением, который задает кривую цена — спрос, представленную нагрузкой с нелинейным внутренним сопротивлением. С зажимов этих двух элементов снимаются данные о скорости продажи и цене, причем скорость продажи интегрируется и вычитается из наличных запасов. Продажная цена умножается на скорость, интегрируется и поступает в вычислительное устройство для определения прибыли. Скорость производства интегрируется и вычитается из наличных запасов сырья, что вызывает несоответствие между желаемыми и действительными запасами сырья. Эта разность воздействует на усилитель, имитирующий заказы на новое сырье. Фиксированное запаздывание поставок дополнительного количества сырья имитируется с помощью электронной линии задержки, причем выходной сигнал с этой линии после интегрирования добавляется к запасам сырья.

Как двухсторонняя, так и односторонняя модели ясно показывают тот тип колебаний запасов, который обычно наблюдается экономистами. Кроме того, на модели легко определить влияние изменения различных параметров на стабильность запасов. Как и в следящих системах, особое внимание должно быть уделено чрезмерным запаздываниям; там, где это возможно, весьма желательно предсказание будущих тенденций или введение контуров с опережением по фазе (дифференцирующих цепей), которые используют скорости изменения сигналов. Но как и в следящих системах, этим не следует злоупотреблять. Неправильное использование предсказателя тенденций или контуров с опережением по фазе может настолько расширить частотную характеристику системы, что она будет усиливать высокочастотный шум и возникнут случайные колебания запасов

19 Зак. 2575.



Процент
Затраты на материалы
Затраты на изготовление
Запаздывание поставок
Запаздывание выпуска
Скорость выпуска
Скорость сбыта
Дифференциальная кривая рыночного спроса
Умножитель
Скорость изменения валового дохода
Скорость изменения чистого дохода
Интегратор запасов сырья
Интегратор запасов готовой продукции
Интегратор
Уровень запасов
Упреждение и стабилизация запаздывания поставок (решение предпринимателя)
Упреждение и стабилизация запаздывания выпуска (решение предпринимателя)
Уровень запасов
Желаемый уровень запасов
Желаемый уровень запасов
Продажная цена
Кассовая наличность
Долгосрочная постоянная времени политики предпринимателя
Долгосрочная постоянная времени политики предпринимателя
Долгосрочная постоянная времени политики предпринимателя
Аккумуляция прибылей

Фиг. 2.

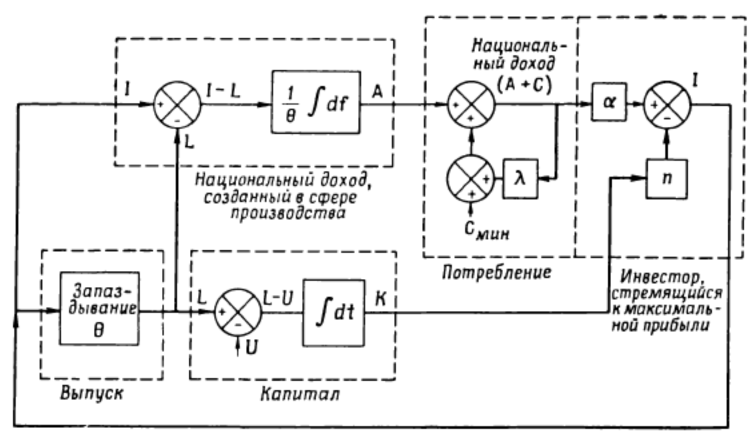
на высокой частоте. Чрезмерное усиление, вызванное непомерным рвением руководителя предприятия, может породить синусоидальные колебания на низкой резонансной частоте. Выбор этой частоты зависит от консультанта по вопросам запаздывания производства и запасов.

Модель показывает, что наличные запасы имеют двоякое назначение. С помощью запасов могут сглаживаться статистические колебания скорости продажи. Для максимальной эффективности установленный уровень должен быть примерно равен половине мощности. Система обратной связи с высоким коэффициентом усиления, включающая элемент запаздывания, соответствующий чистому времени производственного запаздывания, может быть стабилизирована только, если постоянная времени каскада во много раз больше времени запаздывания производства. Политика планирования производства и мощность складов обеспечивают эту стабилизирующую постоянную времени (ослабление на средних частотах).

Эту задачу можно решить на любой универсальной моделирующей установке, такой, как BEAC, REAC, EASE или GEDA. Отрицательные значения скорости выпуска и скорости продажи предотвращаются с помощью диодных ограничителей. Отрицательные значения запасов предотвращаются с помощью реле, которые при уменьшении запасов до нуля переключают систему с регулирования запасов по продаже на регулирование продажи по выпуску. Избыточное предложение также воздействует через реле на вычислительное устройство, рассчитывающее стоимость хранения запасов и продажную цену.

Другой тип модели связан с моделированием макродинамических характеристик экономики страны. Основные черты макродинамической экономики были описаны М. Калецким в 1933 г. и развиты Дж. М. Кейнсом в 1935 г. Пусть имеется завод, выпускающий все капитальные блага (фиг. 3), причем входным сигналом является скорость капиталовложений, а выходным — поставка товаров спустя некоторое усредненное время за-

паздывания и часть национального дохода [1]), обусловленная закупкой сырья и выдачей зарплаты в течение периода производства. Поставляемые товары идут на замену изношенного и на увеличение наличного основного капитала, т. е. они интегрируются и добавляются к ос-



Фиг. 3.

татку наличного основного капитала. Часть национального дохода, состоящая из капитальных благ, добавляется к национальному доходу, состоящему из предметов потребления.

Общий национальный доход влияет на темп роста потребления, так как с ростом зарплаты люди расходуют больше, и поэтому существует цепь небольшой положительной обратной связи с коэффициентом усиления меньше единицы, которая связывает общий национальный доход с той его долей, которая идет на потребление.

Инвестор пытается максимизировать прибыль, и его действия могут быть представлены простой формулой капиталовложений: скорость капиталовложений растет

---

[1]) Под «национальным доходом» здесь всюду понимается конечный продукт. — *Прим. ред.*

при увеличении национального дохода, так как в период повышения уровня национального дохода возрастают ожидания прибылей. Скорость капиталовложений уменьшается при увеличении наличного основного капитала, так как ожидания спроса на новые капитальные блага уменьшаются, когда в стране уже достаточно велика их наличность.

Вся эта система взаимосвязей, показанная на фиг. 3, была реализована с помощью аттенюаторов, ненагруженных усилителей, интеграторов и сумматоров. После того как эта система была собрана на моделирующем устройстве, она была испытана в разомкнутом состоянии. Для этого цепь была разомкнута в точке поступления капиталовложений. С помощью обычного метода частотных характеристик были получены ее характеристики в замкнутом состоянии.

Было предсказано и затем подтверждено экспериментально, что система является неустойчивой для всех параметров народного хозяйства, введенных на основании данных о среднем фиксированном времени производственного запаздывания, постоянной времени потребления и постоянной времени износа. Было показано, что при этих параметрах в замкнутой системе возникают регулярные колебания с периодом 10 лет. Было также показано, что любая попытка стабилизировать эту систему введением регулирующих средств почти наверняка обречена на неудачу. Какие бы регулирующие средства ни были предложены — через законодательные установления или правительственные манипуляции налоговой шкалой, допустимыми капиталовложениями, субсидиями, правительственными заказами и т. д., — инвестор учитывает эти условия и принимает новую функцию для максимизации прибыли. Эта новая функция по существу представляет собой отдельный замкнутый контур отрицательной обратной связи, задача которого состоит в том, чтобы почти полностью свести на нет влияние предложенных регулирующих средств.

Амплитуда колебаний в неустойчивой линейной модели не имеет значения, поскольку она возрастает

только до насыщения усилителей. Гипотеза нелинейности экономики и введение ее в систему с помощью функциональных генераторов на диодах со смещением дает амплитуду колебаний, которая выражается значительной денежной величиной. Переходные процессы в системе с таким малым затуханием, как рассматриваемая система, будут продолжаться в течение многих периодов. Иначе говоря, переходный процесс, вызванный первой мировой войной, все еще по существу не закончился. Неправильно было бы утверждать, что вторая мировая война означала возникновение нового переходного процесса в этой системе. Скорее мы имеем дело с реакцией системы на существенное нарушение непрерывности на выходе, вызванное наложением более ранних переходных процессов. Нарушение непрерывности представляет собой изменение одного или нескольких параметров системы, внезапно возникающее в зависимости от мгновенного значения амплитуды колебаний. Это нарушение непрерывности добавляет энергию в систему и стремится к поддержанию колебаний релаксационного типа.

ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ И ТРАНСПОРТИРОВКИ

Другим типом экономической системы является модель международной торговли или потока товаров от большого количества производителей, например поступление молока от фермеров к большому количеству потребителей, скажем к жителям городов. Система этого типа содержит функцию цена — предложение для каждого производителя, представленную в виде источника напряжения и последовательного сопротивления, функцию цена — спрос для каждого потребителя, также представленную источником напряжения и последовательным сопротивлением, и транспортные расходы, связывающие обе зависимости.

Транспортные расходы составляются из некоторых минимально возможных расходов, не зависящих от ко-

личества товара, плюс добавочные расходы, возрастающие с увеличением количества товаров. Модель транспортных расходов состоит из двух диодов, катоды которых соединены и которые не пропускают ток ни в одном направлении, пока цена в одной местности не превысит цену в другой местности более чем на величину минимальных транспортных расходов. Количество товаров, протекающих между двумя точками, представлено током. Последовательно с каждым диодом соединено сопротивление, на котором образуется приращение транспортных расходов.

Модель подобного типа позволяет решать разнообразные задачи международной торговли, а также вычислять оптимальное распределение отдельных товаров, производимых и продаваемых в Соединенных Штатах. Поскольку многие договоры купли-продажи и соглашения о продаже нельзя отменить по первому требованию, существует некоторое запаздывание в перемещении товаров с одного рынка на другой в случае изменения на рынке спроса или цены. Это запаздывание в цепи функции решений для задачи размещения и транспортировки может быть представлено с помощью элементов, накапливающих энергию: последовательно включенных индуктивностей (для задержки в цепи скорости продажи) и емкостей (в цепи запасов), назначением которых является передача запаздывания при составлении прейскуранта, следующего за изменениями факторов, влияющих на цены.

Все источники соединены со всеми потребителями с помощью элементов, имитирующих транспортировку; наиболее важным результатом является определение того, какой из диодов открыт и какой заперт.

ШУМ

При взгляде на график курсов фондовой биржи, усредненные данные индекса Доу-Джонса, кривую государственного долга или на любой график движения экономических показателей в экономическом журнале сразу

же бросается в глаза тот факт, что все эти графики имеют заметную составляющую высокочастотного случайного «шума». Почти всем экономическим системам свойственна большая составляющая случайных колебаний, которую специалист по теории регулирования назвал бы «шумом». Шумы не доводят эти системы до насыщения, так как в этих системах колебания производства от нуля до полной загруженности не происходят на такой высокой частоте. Однако имеется явная потребность разработки стабилизирующих цепей в экономических системах (т. е. цепей принятия решения по деловой политике) с целью ослабления влияния случайного шума на входе.

Полезно уметь предсказывать будущие значения кривой государственного долга, ставки процента или предполагаемых продаж подобно тому, как радиолокационная вычислительная машина экстраполирует статистически наиболее вероятные будущие значения входного сигнала с большим уровнем высокочастотных помех. Иначе говоря, экономисту необходимо научиться оперировать с понятиями «спектральной плотности» и «передаточных функций», когда он имеет в виду принятие решений в деловой политике. Экономическую систему, рассчитанную на максимизацию прибыли, можно создать с помощью тех же методов, какими создается следящая система для минимизации величины ошибок. Для этой цели необходимо, помимо модели, располагать генератором низкочастотных шумов. Если таковой отсутствует, можно получить приближенные данные с помощью серии испытаний в различных частотных диапазонах, используя вместо шума некоторую фиксированную частоту, амплитуда которой равна эффективному значению шума в данном интервале частот.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чтобы динамическую моделирующую установку одностороннего действия можно было с успехом использовать при решении экономических задач, она должна

быть дополнена рядом элементов, которые редко требуются при решении технических задач. Одним из таких элементов является запаздывание или «линия задержки» в отличие от постоянной времени RC. Этот элемент полезен для производственных или транспортных запаздываний. Одним из возможных методов его реализации является магнитный барабан с подвижными записывающими и воспроизводящими головками, использующий пульсирующую продольную модуляцию при высокой скорости записи и считывания. Другим полезным элементом является схема разрыва непрерывности, выполненная на реле, употребляемая для того, чтобы поддерживать действительные величины положительными. Этот элемент подобен модели позиционного ограничения.

Хотя до настоящего времени создано только небольшое число специальных экономических моделирующих установок и маловероятно, чтобы многие торгово-промышленные предприятия смогли позволить себе приобрести универсальную моделирующую установку одностороннего действия, тем не менее техника моделирования представляет большую ценность для экономиста, поскольку она дает ему наглядный материал для размышлений. Она направляет анализ задач в надлежащее русло.

К настоящему времени в журнале «Econometrica» опубликованы многочисленные статьи, в которых используется критерий устойчивости Найквиста, и в этом журнале можно найти также векторные диаграммы экономических систем, которые удивительно похожи на аналогичные диаграммы задач регулирования. Иными словами, экономисты в настоящее время начинают сознавать, что экономика имеет дело с изучением замкнутых нелинейных динамических систем, а раз так, то им следует воспользоваться теми же методами, которые в настоящее время применяются инженерами по регулированию и следящим системам. Эти модели нисколько не облегчат экономисту получение исходных данных, необходимых для статистического анализа, но они помогут ему выяснить, какого типа данные он должен измерить в экономической системе, чтобы получить наиболее полезные и плодотворные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalecki M., „A Macrodynamic Theory of Business Cycles", *Econometrica,* **3**, 327—344 (1935).
2. Erdley H. F., „Business Cycle Stability from an Electrical Analog of an Economic System", диссертация, Univ. of California, Berkeley, June 1950.
3. Newlyn W. T., „The Philips/Newlyn Hydraulic Model", *Yorkshire Bull. Econ. Soc. Res.,* **2**, № 2, 111—127 (1950).
4. Philips A. W., „Mechanical Models in Economic Dynamics", *Economica,* **17**, № 67, 283—305 (1950).
5. Simon H. A., „An Exploration into the Use of Servomechanisms Theory in the Study of Production Control", Cowless Commission Discuss. Paper, Economics, Number 288, Univ. of Chicago, August 17, 1950.
6. Strotz R. H., Calvert J. F., Morehouse N. F., „Analog Computing Techniques Applied to Economics", Trans. AIEE, **70**, P. I, 557—563 (1951).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА[1]

1. Allen R. G. D., „The Engineer Approach to Economic Models", *Economica*, 22, 158—168 (1955).
2. Allen R., Mathematical Economics, London, 1960 (перевод готовится к изданию в Издательстве иностранной литературы).
3. Bellman P., Glicksberg I., Gross O. A., Some Aspects of the Mathematical Theory of Control Processes, Santa Monica, 1958 (перевод готовится к изданию в Издательстве иностранной литературы).
4. Bothwell F. E., „The Method of Equivalent Linearisation", *Econometrica*, 20, 269—283 (1952).
5. Chenery H. B., Clarc P. G., Interindustry Economics, New York, 1959 (перевод готовится к изданию в Издательстве иностранной литературы).
6. Cohen K. J., Cyert R. M., „Computer Models in Dynamic Economics", *Quart. J. Economics*, 75, № 1 (1961).
7. Cowles Commission Monograph № 14, Studies in Econometric Methods, New York, 1953.
8. Duesenberry J. S., Eckstein O., Fromm I., „A Simulation of the United States Economy in Recession", *Econometrica*, 28, № 4 (1960).
9. „Etudes sur la Cybernetique et l'Economie", *Cahiers Inst. Sci. Econ. Appl.*, № 72 (1958).
10. Goodwin R. M., „The Non-linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles", *Econometrica*, 19, 1—17 (1951).
11. Kalecki M., Theory of Economic Dynamics, London, 1954.
12. Kramer J. D., Jr., „On Control of Linear Systems with Time Lags", *Information and Control*, 3 (1960).
13. Philips A. W., „Stabilisation Policy in a Closed Economy", *Economic J.*, 64, 290—393 (1954).
14. Philips A. W., „Stabilisation Policy and the Time Form of Lagged Responses", *Economic J.*, 67, 265—277 (1957).

---

[1]) Добавлена редакторами русского перевода.

15. Philips A. W., „Some notes on the Estimation of Time-Form of Reactions in Interdependent Dynamic Systems", *Economica*, **23**, 99—113 (1956).
16. Philips A. W., Cybernetics and the Regulation of Economic Systems, London, 1959.
17. Philips A. W., The Estimation of Parameters in Systems of Stochastic Differential Equations, London, 1959.
18. Quenouille M., The Analysis of Multiple Time-Series, London, 1957.
19. Strotz R. H., Mc Analty J. C., Naines I. B., „Goodwins Nonlinear Theory of Solution", *Econometrica*, **21**, 390—411 (1953).

СОДЕРЖАНИЕ

**ПРОЦЕССЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ
В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

Редакторы *В. Я. ФРИДМАН и
Л. П. ЯКИМЕНКО*
Художественный редактор *Н. В. Зотова*
Технический редактор *С. В. Приданцева*
Корректор *О. К. Румянцева*

Сдано в производство 1/VI-1961 г.
Подписано к печати 25/X-1961 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$ =4,6 бум. л.
15,2 печ. л. *Уч.*-изд. л. 14,9
Изд. № 20/0163. Цена 1 р. 19 к.
Зак. 2575.

* * *

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

* * *

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ИЗДАТЕЛЬСТВО

ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Вышли из печати:

Кибернетический сборник вып. 2, 15 изд. л., цена в переплете 1 р. 28 к.

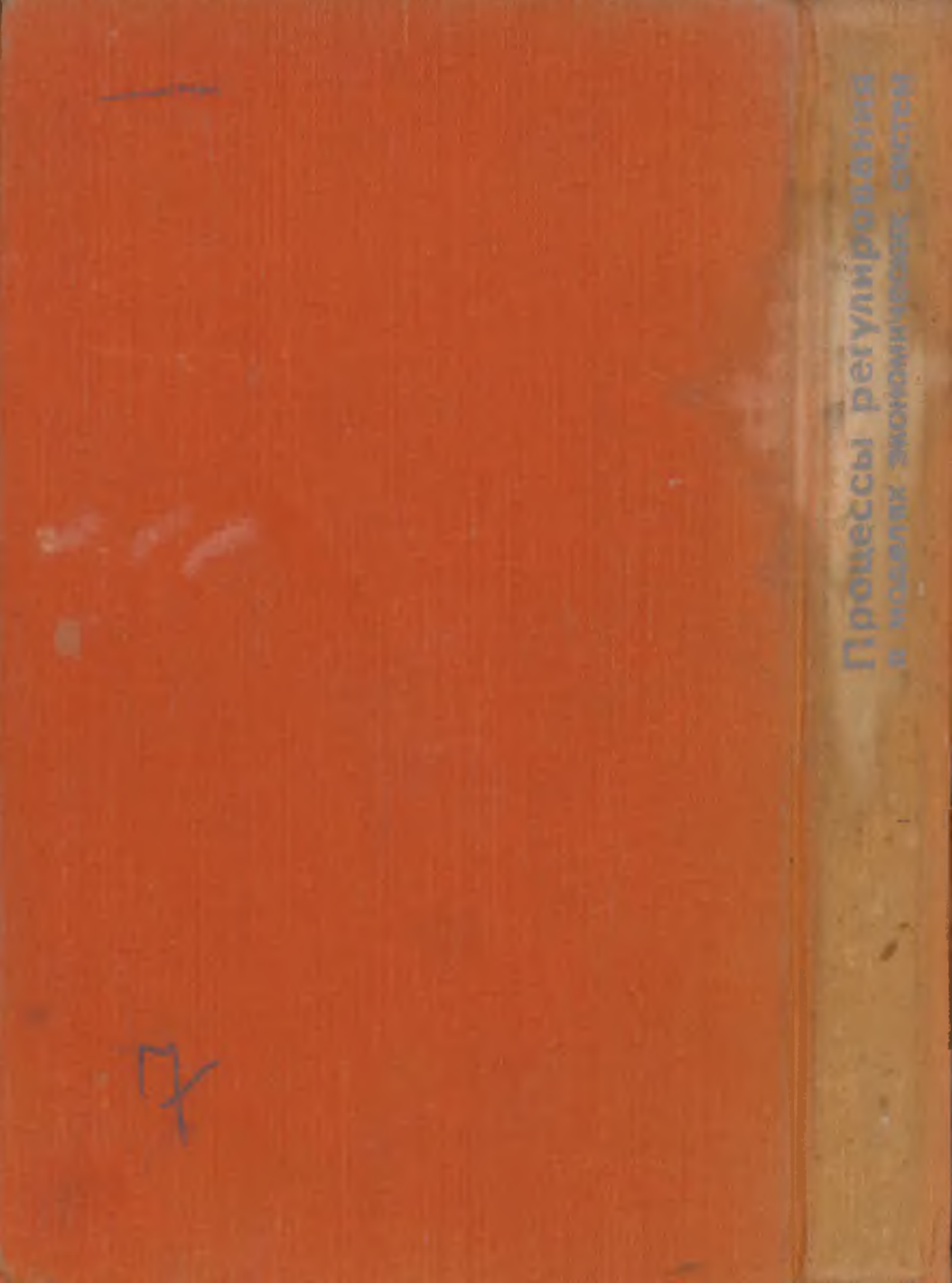
В первом разделе помещена популярная статья о применении математической логики, теории вероятностей и теории игр при постановке диагноза и определении наиболее эффективного метода лечения. Большое место во втором и третьем разделах занимают материалы по новейшей вычислительной машине СТРЕТЧ (около 1 000 000 операций в сек.). В других статьях этих разделов приводятся результаты исследований по надежности автоматов, теории самокорректирующихся кодов и теории транспортных сетей. Вопросам математической лингвистики посвящен последний раздел сборника. Здесь рассматриваются структурные модели языка.

Кибернетический сборник, вып. 3, 14 изд. л., цена в переплете 1 р. 12 к.

Сборник открывается работой Н. Винера и А. Розенблюта о математической модели сердца. Второй раздел содержит статьи по математической логике, теории кодирования и теории автоматов. В третьем и четвертом разделах помещены статьи о новом подходе к синтезу электронной вычислительной машины, о самонастраивающихся автоматах и специализированных машинах, способных решать игровые задачи.

Льюс Р. Д. и Райфа Х. **Игры и решения: введение и критический обзор,** перевод с английского, 37 изд. л., цена в переплете 2 р. 78 к.

Среди приложений, обсуждаемых в книге, значительное место занимают приложения к различным вопросам экономики и других общественных наук.


Процессы регулирования
в моделях экономических систем